Capítulo 1 - Conectivos lógicos e quantificadores

A linguagem matemática usual combina o português com outros símbolos que têm um significado específico em Matemática.

Neste capítulo 1 recordar-se-á, de uma forma informal, os conectivos lógicos e quantificadores, fixando nomeadamente os símbolos que serão usados para os identificar, bem como outras notações e conceitos associados. Mais geralmente, podemos dizer que neste capítulo[1] se faz uma introdução, muito resumida e largamente baseada na intuição, a noções da Lógica Matemática[2].

Secção 1: Termos, proposições e conectivos lógicos.

A linguagem usada na Matemática, como qualquer outra linguagem, compreende *designações* (também chamadas de *termos*) e *frases*[3].

Designações ou termos

As designações servem para indicar (designar) determinadas *entidades*, normalmente *objectos matemáticos* no caso da linguagem matemática (números, pontos, conjuntos, funções, figuras geométricas, etc.). Exemplos de designações usuais em matemática são[4]:

$$24,\ 12 * 2,\ 14.3,\ 2 + 3\,i, \text{ etc.}$$

As duas primeiras designações referem-se ao mesmo objecto, pelo que são ditas de designações *equivalentes*. Para indicar que duas designações, a e b, são equivalentes, escreve-se usualmente $a = b$.

Os nomes de pessoas são exemplos de designações usuais em português. As designações a seguir[5],

"Rui Ferreira Molarinho Carmo" e "o pai do autor deste texto"

designam a mesma pessoa, sendo portanto equivalentes. Em português, também se diz que são *sinónimas* duas designações que designam a mesma entidade.

---

[1] Este capítulo 1 baseia-se, em grande medida, no capítulo 1 de [19], embora adaptando e modificando algumas partes desse texto, e introduzindo algumas noções aí não consideradas. Esta opção, para além de permitir capitalizar no texto escrito pelo Professor Campos Ferreira, permite introduzir os conceitos em causa usando a terminologia e a forma que é usualmente seguida pelos colegas da importante área da Análise Matemática, mas procurando, ao mesmo tempo, introduzir terminologia e outros conceitos usados na área da Lógica Matemática.

[2] Noções que serão abordadas de forma formal e mais desenvolvida na disciplina de *Lógica*, no 2º ano.

[3] Em lógica, as designações são usualmente denominadas de *termos* e as frases das linguagens formais de *fórmulas*. Em matemática (e em potuguês) o termo *expressão* é em geral usado num sentido amplo, que cobre desde designações a certos tipos de frases.

[4] Nas linguagens de programação, na descrição dos números reais usa-se o ponto e não a vírgula, e para designar a operação de multiplicação usa-se * e não $\times$. Aqui usaremos também o ponto decimal e para designar a produto usaremos indistintamente qualquer dos símbolos * ou $\times$ (este último apenas se daí não surgir confusão com a letra x, p.ex. de alguma eventual variável).

[5] As expressões "Dr. Jorge Sampaio" e "o actual Presidente da República de Portugal" também designam a mesma pessoa no momento em que está a ser escrito este capítulo, mas já não referirão a mesma pessoa daqui a alguns meses. No âmbito de certas lógicas temporais é possível expressar este facto.

Proposições

As frases da linguagem matemática exprimem afirmações - que podem ser *verdadeiras* ou *falsas* - a respeito dos objectos matemáticos. A este tipo de frase, que é necessariamente ou verdadeira ou falsa, é costume dar o nome de *proposição* (ou *asserção*; *statement* em inglês). Exemplos, da vida corrente e da matemática, são: "O João Silva é casado"[6], 7>3, 4<2, etc. Em português (como noutras linguagens) existem frases que não são proposições; por exemplo, comandos do tipo "Vai comprar-me o jornal, se faz favor" (note-se que enquanto que a frase "sai da aula!" não é uma proposição, no sentido acima referido, a frase "o Professor disse para o aluno sair da aula" já pertence a essa categoria).

O *valor lógico* ou *valor de verdade* de uma proposição é um valor que traduz a veracidade ou falsidade da proposição: se uma proposição é verdadeira diz-se que tem o valor lógico 1 (ou V, ou T de "True"); se é falsa diz-se que tem o valor lógico 0 (ou F). Aos valores lógicos também se chama de valores *booleanos*.

Quando num texto matemático se diz que "se tem" uma certa proposição P, quer-se com isto significar que a asserção expressa por P é verdadeira, e quando se diz que se vai demonstrar uma dada proposição (asserção) tal significa que se vai demonstrar que essa "proposição é verdadeira". O termo *tese* é vulgarmente usado para designar a asserção que se pretende demonstrar.

Frases atómicas e conectivos lógicos

Às frases de uma linguagem que não são decomponíveis em frases mais simples é costume chamar de *frases atómicas*. Exemplos (do português e da matemática): "O João Miguel é pai", "2+3=5", etc.

Os *conectivos proposicionais*, ou *conectivos lógicos*, são operadores (linguísticos) que nos permitem construir novas proposições a partir de outras (que se dizem os argumentos desses operadores), e que se caracterizam por o valor lógico das novas proposições, assim obtidas, ser completamente determinado pelo valor lógico das respectivas proposições argumento.

Os conectivos proposicionais mais importantes (de que falaremos em seguida) são os conectivos de negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência.

Negação

Suponha-se que P representa uma proposição (qualquer). A *negação* de P é uma (nova) proposição cujo valor de verdade é o oposto do valor de verdade de P. Por exemplo, se P é a asserção "o João Miguel é pai", a sua negação é a asserção "o João Miguel não é pai" ou "não é verdade que o João Miguel seja pai". A segunda forma de exprimir a negação de P pode ser generalizada para qualquer proposição P. De facto (esquecendo o "que" e a mudança do indicativo para o conjuntivo do verbo), podemos exprimir a negação de uma asserção P escrevendo "não é verdade P". Por exemplo, a negação da asserção "o João Miguel tem menos de dois anos ou mais de 5 anos" pode ser descrita escrevendo "não é verdade que o João Miguel tenha menos de dois anos ou mais de 5 anos". Naturalmente, levando em linha de conta o nosso conhecimento dos números naturais, podemos escrever de forma equivalente "o João Miguel tem 2, 3, 4 ou 5 anos".

---

[6] Podemos não saber se esta asserção é verdadeira ou falsa, mas isso não invalida que ela seja necessariamente verdadeira ou falsa.

Na linguagem matemática, em que procuramos ser sintéticos e ignorar detalhes não relevantes para os objectivos em vista (como o modo do verbo), a negação de P exprime-se escrevendo:

$$\neg P \text{ ou } (\neg P)$$

e ¬ é designado pelo conectivo lógico de negação (¬ é o símbolo que é usado para exprimir tal operação de negação). Em ¬P pode dizer-se que P é o argumento de ¬.

A vantagem de utilização de parênteses (só consideraremos parênteses curvos) reside em retirar qualquer ambiguidade à leitura de expressões mais complexas onde a negação de P ocorra como subexpressão. No entanto, a utilização de muitos parênteses torna as expressões pesadas, pelo que é prática corrente utilizar convenções, como prioridades (precedências) entre os operadores, que permitam evitar os parênteses ao máximo (por exemplo, considerando agora o domínio dos números, a operação de multiplicação tem prioridade sobre a da adição, etc.). Como tais regras de precedência são em geral já conhecidas, falaremos delas só quando for essencial.

Alguns matemáticos exprimem a negação de P escrevendo: ~P (ou, usando parênteses, (~P)). Aqui usaremos ¬P em vez de ~P, mas os alunos têm de estar habituados a ambas as notações, pois têm de ser capazes de ler qualquer texto matemático percebendo facilmente quais as notações que estão a ser usadas para os conceitos básicos (muitas vezes assumidas, sem qualquer referência).

Pode-se dizer que é estranho que uma ciência com tantos anos como a Matemática ainda não tenha uniformizado totalmente notações e conceitos básicos (como por exemplo se o zero é um natural, como consideraremos neste texto, ou não). Tal tem a ver com muitos factores, como diferentes escolas do pensamento matemático, e mais do que estarmos a discutir como isso poderia ser ultrapassado, o melhor é sermos pragmáticos e aprendermos a lidar com tal realidade.

O facto de ¬P traduzir uma proposição cujo valor lógico (ou valor de verdade) é o oposto do valor lógico da proposição (argumento) P é normalmente expresso através da conhecida *tabela de verdade*:

P	¬P
1	0
0	1

Conjunção

A *conjunção* de duas proposições P1 e P2 é uma nova proposição que é verdadeira sse (se e somente se) as duas asserções componentes, P1 e P2, forem verdadeiras.

A conjunção de P1 e P2 exprime-se em português escrevendo "P1 e P2", enquanto que em matemática se exprime normalmente por[7]:

$$P1 \wedge P2 \text{ (ou, usando parênteses, } (P1 \wedge P2))$$

Em P1 ∧ P2 pode dizer-se que P1 e P2 são os argumentos de ∧.

A relação entre os valores lógicos de P1 e P2 e o valor lógico da sua conjunção é expressa pela tabela de verdade:

[7] Noutro tipo de linguagens outros símbolos são usados. Por exemplo, na linguagem de programação *Mathematica* usar-se-ia And[P1,P2] ou P1&&P2 para designar a conjunção de P1 com P2, e Not[P] ou !P para designar a negação de P.

P1	P2	P1 $\wedge$ P2
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunção

A *disjunção* de P1 e P2 exprime-se em português escrevendo "P1 ou P2", e em matemática escrevendo:

$$P1 \vee P2$$

A disjunção só é falsa quando ambas as proposições argumento o forem, como decorre da tabela:

P1	P2	P1 $\vee$ P2
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Para além desta forma de disjunção, é também muitas vezes usada uma outra forma de disjunção, a chamada "*disjunção exclusiva*" (ou "*ou exclusivo*"). A disjunção exclusiva entre duas asserções P1 e P2 exprime-se normalmente em português escrevendo "ou P1 ou P2", e em matemática pondo um ponto em cima do sinal de disjunção ($\dot{\vee}$). A diferença para a disjunção é que quando se afirma "ou P1 ou P2" se subentende que pelo menos uma das proposições (P1 ou P2) é verdadeira, mas não ambas. Refira-se, no entanto, que o Português é ambíguo, e nem sempre é claro, quando se escreve "ou P1 ou P2", se se pretende considerar a disjunção exclusiva, ou a simples disjunção (também designada às vezes de "disjunção inclusiva"). Não trabalharemos neste texto com a disjunção exclusiva.

Exercício 1:

A disjunção exclusiva entre duas asserções P1 e P2 pode ser expressa à custa das outras operações. Verifique esta afirmação construindo a tabela de verdade da expressão

$$(P1 \vee P2) \;\wedge\; \neg(P1 \wedge P2)$$

e comparando-a com a tabela de verdade da disjunção exclusiva entre P1 e P2.

Este facto - de se poder exprimir um conectivo à custa de outros - verifica-se para muitos conectivos, e não apenas para a disjunção exclusiva.

∇

Implicação

A *implicação* entre P1 e P2 traduz o condicional "Se P1 então P2", que também se exprime em português escrevendo "P1 implica P2". Em matemática os símbolos mais usados para esse fim são[8]:

$$\Rightarrow \quad e \quad \rightarrow$$

Aqui usaremos o símbolo $\Rightarrow$ para exprimir a implicação.

---

[8] Embora $\Rightarrow$ e $\rightarrow$ sejam, de longe, os símbolos mais usados para exprimir a implicação, em alguns textos são utilizados outros símbolos (p.ex. certos lógicos usam o símbolo $\supset$ para esse fim).

Numa implicação P1 $\Rightarrow$ P2 [9], diz-se que P1 é o *antecedente* da implicação e P2 o *consequente*. (Pode também dizer-se que P1 e P2 são os argumentos de $\Rightarrow$ em P1 $\Rightarrow$ P2.)

Como se pretende que a afirmação "Se P1 então P2" só seja falsa quando P1 for verdadeira e P2 for falsa, obtém-se a seguinte tabela de verdade para a implicação:

P1	P2	P1 $\Rightarrow$ P2
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Quando uma implicação P1 $\Rightarrow$ P2 é verdadeira, também se diz que P1 é uma *condição suficiente* para P2, e que P2 é uma *condição necessária* para P1. (Assim, afirmar que P1 $\Rightarrow$ P2 é o mesmo que afirmar que P1 é uma condição suficiente para P2.)

O *recíproco* de uma asserção da forma P1 $\Rightarrow$ P2 é a asserção P2 $\Rightarrow$ P1. Por sua vez, a asserção ($\neg$P2) $\Rightarrow$ ($\neg$P1) diz-se o *contra-recíproco* de P1 $\Rightarrow$ P2. Uma implicação é verdadeira sse o seu contra-recíproco o é. Mas, da veracidade de uma implicação não se pode concluir que o seu recíproco seja verdadeiro, nem da veracidade do recíproco se pode concluir a veracidade da implicação.

Equivalência

Em lógica diz-se que duas proposições são *equivalentes* (ou *logicamente equivalentes*) se têm o mesmo valor de verdade[10].

A equivalência entre P1 e P2 exprime-se em português escrevendo, por exemplo, "P1 é equivalente a P2". Outras expressões portuguesas que exprimem o mesmo significado, muito usadas nomeadamente por matemáticos, são "P1 é uma condição necessária e suficiente para P2" e "P1 se e somente se P2" (que, como referimos no início deste texto, se abrevia usualmente escrevendo "P1 sse P2", tal como a expressão inglesa "if and only if" se abrevia escrevendo "iff").

Para além das expressões linguísticas anteriores, os matemáticos usam também símbolos para exprimir a equivalência entre duas asserções (tal como se passava com as operações lógicas anteriores). Em matemática os símbolos mais usados para esse fim são[11]:

$$\Leftrightarrow \quad \text{e} \quad \leftrightarrow$$

Aqui usaremos o símbolo $\Leftrightarrow$. (E pode dizer-se que P1 e P2 são os argumentos de $\Leftrightarrow$ em P1 $\Leftrightarrow$ P2.)

Do que dissemos acima, decorre a seguinte tabela de verdade para esta operação:

---

[9] Às vezes escreve-se também P2 $\Leftarrow$ P1 significando P1 $\Rightarrow$ P2.

[10] Mais correctamente, do ponto vista formal, deveríamos dizer "duas proposições são equivalentes *sse* têm o mesmo valor de verdade". No entanto, é frequente, em definições, usar apenas o condicional *se* significando, de facto, o "bi-condicional" *sse*. Quando escrevemos em português é usual existirem ambiguidades (e imprecisões) que o contexto e/ou a prática corrente resolve. Devemos saber lidar com essas situações. Mas é um bom hábito sermos rigorosos, em particular em textos matemáticos (e em textos científicos, em geral).

[11] Alguns autores usam também o símbolo $\equiv$ para denotar a equivalência.

P1	P2	P1 ⇔ P2
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exercício 2:

Recorrendo apenas aos conectivos lógicos $\wedge$ e $\Rightarrow$ escreva uma expressão que seja equivalente[12] a (P1⇔P2)

∇

Substituição de equivalentes

Intuitivamente (e em linguagem coloquial) duas "coisas" são equivalentes, se é indiferente ter uma ou outra. Tal traduz-se, no que aqui respeita, pelos seguintes resultados relativos à *substituição de equivalentes*[13] (a seguir enunciados de forma relativamente informal):

- *Substituição de termos equivalentes num termo*:

  "Se substituirmos, num termo *t*, um seu sub-termo (isto é, informalmente, um termo que faça parte do termo t) por outro que lhe seja equivalente, obtemos um termo equivalente ao termo inicial *t* (i.e. que designa o mesmo objecto que *t*)".

  Exemplos: como 2+3=5, tem-se também que $(2+3)^2 = 5^2$; como a expressão "o autor deste texto" designa a mesma pessoa que "José Carmo", as expressões "a mãe do autor deste texto" e "a mãe de José Carmo" designam também a mesma pessoa.
- *Substituição de termos equivalentes numa proposição*:

  "Se substituirmos, numa proposição, um termo por outro que lhe seja equivalente, obtemos uma proposição equivalente à inicial (isto é, que tem o mesmo valor lógico que a proposição inicial: ou são ambas verdadeiras, ou ambas falsas)".

  Exemplos: como 2+3=5, tem-se $(2+3) > 7 \Leftrightarrow 5 > 7$; analogamente, a proposição "o autor deste texto tem duas filhas" é equivalente à proposição " José Carmo tem duas filhas".
- *Substituição de proposições equivalentes numa proposição*:

  "Se substituirmos numa asserção, uma das proposições que a compõem por uma outra que lhe seja equivalente, obtemos uma asserção que é equivalente à asserção inicial".

  Por exemplo, como $2 < 1$ é equivalente a $1 > 2$, a proposição $2 < 1 \wedge (-1)^2 = 1^2$ é equivalente à proposição $1 > 2 \wedge (-1)^2 = 1^2$ (no caso são ambas falsas).

Segue-se mais alguma terminologia útil, associada a este tópico, bem como o conceito fundamental de tautologia.

---

[12] Do que dissemos, decorre, naturalmente, que qualquer expressão lógica que tenha a mesma tabela de verdade que (P1⇔P2), é-lhe equivalente.

[13] Na disciplina de Lógica demonstrar-se-ão estes resultados em relação a certos tipos de linguagens formais, definidas de forma precisa.

Aridade e precedências entre os conectivos lógicos

Informalmente, podemos dizer que a *aridade* de um operador indica o número de argumentos deste. O operador (ou conectivo) de negação aplica-se a uma asserção. Por sua vez, os restantes conectivos introduzidos ligam duas asserções. Assim, diz-se que o operador de negação tem aridade 1 (ou que é um operador unário), e que os operadores de conjunção, disjunção, implicação e equivalência têm aridade 2 (ou que são operadores binários).

Assume-se as seguintes *prioridades* (*precedências*) entre os conectivos lógicos: 1º) o operador unário ¬; 2º) ∧; 3º) ∨; 4º) ⇒ e ⇔ (não vamos neste texto assumir qualquer precedência entre ⇒ e ⇔).

Usando estas regras, podemos escrever simplesmente ¬P2 ⇒ ¬P1 em vez de (¬P2) ⇒ (¬P1), assim como (P1 ⇒ P2) ⇔ ¬P1 ∨ P2 em vez de (P1 ⇒ P2) ⇔ ((¬P1) ∨ P2). Como é usual, os parênteses curvos podem ser usados para ultrapassar as regras de precedência mencionadas.

Tautologias (e contradições)

Algumas expressões lógicas construídas à custa dos conectivos proposicionais são verdadeiras pela sua estrutura, no sentido de que assumem o valor lógico 1 (verdadeiro) seja qual for o valor lógico das proposições atómicas componentes (em termos de tabelas de verdade tal significa que a última coluna terá o valor 1 em todas as linhas). A tais asserções chama-se de *tautologias*.

Por sua vez, chama-se de *contradições* às expressões que assumem o valor lógico 0 (falso) seja qual for o valor lógico das proposições atómicas componentes (em termos de tabelas de verdade tal significa que a última coluna terá o valor 0 em todas as linhas).

É fácil verificar que a negação de uma tautologia é uma contradição e, vice-versa, a negação de uma contradição é uma tautologia.

Usaremos os símbolos

$$\top \text{ e } \bot$$

para identificar, respectivamente, uma tautologia e uma contradição[14].

Observação 1 (proposições verdadeiras e tautologias):

É diferente afirmar que uma proposição (asserção) concreta é verdadeira ou que é uma tautologia. Se uma proposição concreta é uma tautologia então é verdadeira, mas o recíproco pode não se verificar. A noção de tautologia tem a ver com a forma (com a estrutura) da proposição. Por exemplo:

- A proposição 2+3 = 6 ⇒ 2+3 = 6 tem a forma de uma implicação P ⇒ P (pode ser vista como uma instância de uma implicação da forma[15] P ⇒ P). Ora, seja qual for (o valor de verdade d)a proposição

---

[14] Podemos ver ⊤ e ⊥ como abreviaturas de, por exemplo, P∨¬P e P∧¬P, para P uma qualquer proposição, que se poderá fixar.

[15] A expressões lógicas, como P⇒P ou P1⇒(P2∨P3), que envolvem símbolos (P, P1, P2 e P3, nos casos anteriores) que denotam proposições genéricas (no sentido de que não representam uma proposição concreta específica, podendo ser substituídos por quaisquer proposições concretas, funcionando como variáveis no domínio das proposições), também se chama por vezes de proposições-esquema (por representarem a forma - o esquema - de um conjunto de várias proposições). As distinções entre frases e frases-esquema e entre variáveis da linguagem e da meta-linguagem é um assunto que será discutido na disciplina de Lógica, e que não pretendemos abordar aqui.

P, a proposição $P \Rightarrow P$ é verdadeira (a respectiva tabela de verdade assume o valor 1 em todas as linhas da coluna final). Assim, diz-se que $P \Rightarrow P$ é uma tautologia; qualquer proposição concreta que possa ser vista como tendo essa forma (que seja uma instância dessa forma) também se diz uma tautologia (ou uma instância de uma tautologia). A proposição $2+3 = 6 \Rightarrow 2+3 = 6$ é verdadeira não tanto pelas proposições atómicas concretas que a compõem, mas desde logo pela sua estrutura lógica.

- A proposição $2+3 = 8 \Rightarrow (2+3 = 8 \vee 7 = 2)$ pode ser vista como uma instância de uma implicação da forma $P1 \Rightarrow (P1 \vee P2)$. Ora, sejam quais forem (os valores de verdade d)as proposições P1 e P2, a proposição $P1 \Rightarrow (P1 \vee P2)$ é verdadeira (a respectiva tabela de verdade assume o valor 1 em todas as linhas da coluna final). Assim, diz-se que $P1 \Rightarrow (P1 \vee P2)$ é uma tautologia; qualquer proposição concreta que possa ser vista como tendo essa forma também se diz uma tautologia (é uma instância dessa tautologia). Logo a proposição $2+3 = 8 \Rightarrow (2+3 = 8 \vee 7 = 2)$ é uma tautologia.
- Considere-se agora a proposição $2+3 = 8 \Rightarrow (2+3 = 7 \vee 7 = 2)$. Ela pode ser vista como uma instância de três formas de proposições: P (é uma proposição), $P1 \Rightarrow P2$ (é uma implicação) ou $P1 \Rightarrow (P2 \vee P3)$ (é uma implicação entre uma proposição e uma disjunção de duas proposições). Ora: P não é uma tautologia (basta supor que se substitui P pela proposição 2=3 que se obtém uma proposição falsa); $P1 \Rightarrow P2$ não é uma tautologia (basta considerarmos que P1 assume o valor 1, i.e. designa uma proposição verdadeira, e que P2 assume o valor 0, i.e. designa uma proposição falsa, para que a implicação $P1 \Rightarrow P2$ seja falsa); e $P1 \Rightarrow (P2 \vee P3)$ também não é uma tautologia (porquê?). Logo $2+3 = 8 \Rightarrow (2+3 = 7 \vee 7 = 2)$ não pode ser uma tautologia, apesar de ser uma proposição verdadeira (pois o seu antecedente é falso). A diferença para o caso anterior é que enquanto $2+3 = 8 \Rightarrow (2+3 = 8 \vee 7 = 2)$ pode ser vista como uma instância de uma implicação da forma $P1 \Rightarrow (P1 \vee P2)$, já $2+3 = 8 \Rightarrow (2+3 = 7 \vee 7 = 2)$ não pode.
- Analogamente, a proposição $2+3 = 5 \Rightarrow (2+3)^2 = 5^2$ é verdadeira (pelo princípio ou regra da substituição de termos equivalentes), mas não é uma tautologia (porquê?).

∇

<u>Exercício 3</u>:

i) Considere a proposição $2+3 = 8 \Rightarrow (2+3 = 8 \wedge 7 = 2)$.
   Trata-se de uma proposição verdadeira? (Justifique)
   Trata-se de uma tautologia? (Justifique)

ii) Considere a proposição $2+3 = 5 \Rightarrow (2+3 = 5 \wedge 7 = 4+3)$.
   Trata-se de uma proposição verdadeira? (Justifique)
   Trata-se de uma tautologia? (Justifique)

∇

O exercício a seguir refere algumas das propriedades mais importantes dos conectivos lógicos.

<u>Exercício 4</u>:

Verifique que são tautologias (onde P, P1, P2 e P3 designam proposições genéricas, quaisquer):

i) $\perp \Rightarrow P$

ii)	$P \Rightarrow \top$	
iii)	$(P1 \wedge P2) \Leftrightarrow (P2 \wedge P1)$	(a conjunção é comutativa)
iv)	$(P1 \vee P2) \Leftrightarrow (P2 \vee P1)$	(a disjunção é comutativa)
v)	$(P1 \Leftrightarrow P2) \Leftrightarrow (P2 \Leftrightarrow P1)$	(a equivalência também é comutativa)
vi)	$(P1 \wedge P2) \Rightarrow P1$	
vii)	$(P1 \wedge P2) \Rightarrow P2$	
viii)	$P1 \Rightarrow (P1 \vee P2)$	
ix)	$P2 \Rightarrow (P1 \vee P2)$	
x)	$(P \wedge \top \Leftrightarrow P) \wedge (\top \wedge P \Leftrightarrow P)$	($\top$ é o elemento neutro para a conjunção)
xi)	$(P \vee \bot \Leftrightarrow P) \wedge (\bot \vee P \Leftrightarrow P)$	($\bot$ é o elemento neutro para a disjunção)
xii)	$P \wedge (P1 \vee P2) \Leftrightarrow (P \wedge P1) \vee (P \wedge P2)$	(distributividade, no caso à direita, do $\wedge$ em relação ao $\vee$)
xiii)	$P \vee (P1 \wedge P2) \Leftrightarrow (P \vee P1) \wedge (P \vee P2)$	(distributividade, no caso à direita, do $\vee$ em relação ao $\wedge$)
xiv)	$\neg(P1 \vee P2) \Leftrightarrow \neg P1 \wedge \neg P2$	(*uma das primeiras leis de De Morgan*)
xv)	$\neg(P1 \wedge P2) \Leftrightarrow \neg P1 \vee \neg P2$	(*outra das primeiras leis de De Morgan*)
xvi)	$(P1 \Leftrightarrow P2) \Leftrightarrow ((P1 \Rightarrow P2) \wedge (P2 \Rightarrow P1))$	
xvii)	$(P1 \Rightarrow P2) \Leftrightarrow (\neg P2 \Rightarrow \neg P1)$	(uma implicação é equivalente ao seu contra-recíproco)
xviii)	$(P1 \Leftrightarrow P2) \Leftrightarrow (\neg P1 \Leftrightarrow \neg P2)$	
xix)	$((P1 \Rightarrow P2) \wedge (P2 \Rightarrow P3)) \Rightarrow (P1 \Rightarrow P3)$	(transitividade da implicação)
xx)	$((P1 \Leftrightarrow P2) \wedge (P2 \Leftrightarrow P3)) \Rightarrow (P1 \Leftrightarrow P3)$	
xxi)	$(P1 \Rightarrow (P2 \Rightarrow P3)) \Leftrightarrow ((P1 \wedge P2) \Rightarrow P3)$	
xxii)	$((P \Rightarrow P1) \wedge (P \Rightarrow P2)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (P1 \wedge P2))$	
xxiii)	$((P1 \Rightarrow P) \wedge (P2 \Rightarrow P)) \Leftrightarrow ((P1 \vee P2) \Rightarrow P)$	
xxiv)	$(P1 \Rightarrow P2) \Leftrightarrow ((P1 \wedge \neg P2) \Rightarrow \bot)$	(a base do *método de redução ao absurdo* : ver à frente)
xxv)	$(P1 \Rightarrow P2) \Leftrightarrow \neg P1 \vee P2$	
xxvi)	$\neg(P1 \Rightarrow P2) \Leftrightarrow P1 \wedge \neg P2$	
xxvii)	$\neg P1 \Rightarrow (P1 \Rightarrow P2)$	
xxviii)	$P2 \Rightarrow (P1 \Rightarrow P2)$	
xxix)	$((P1 \vee P2) \wedge \neg P1) \Rightarrow P2$	
xxx)	$P \Leftrightarrow \neg\neg P$	
xxxi)	$P \vee \neg P$	(princípio do terceiro excluído)
xxxii)	$\neg(P \wedge \neg P)$	(princípio da não contradição)

∇

<u>Observação 2</u> (<u>dedução de tautologias</u>):

Há várias maneiras de demonstrar que se está em presença de uma tautologia (como em geral há várias maneiras de demonstrar um qualquer resultado).

Uma maneira directa, muito simples[16], consiste em construir a tabela de verdade da expressão[17] e verificar que na coluna final (do resultado) todas as linhas têm o valor 1.

Uma outra maneira (que podemos classificar de tipo dedutivo) consiste em mostrar que a expressão em causa pode ser obtida a partir de outras tautologias por aplicação de regras que preservam tautologias (i.e. que quando aplicadas a tautologias retornam tautologias). Por exemplo, pode provar-se que:

- A regra (de que falaremos à frente) conhecida por *Modus Ponens* (abreviadamente *MP*) preserva as tautologias, o que pode ser enunciado dizendo que:
  "Se P1 e P1 $\Rightarrow$ P2 são tautologias, então P2 também o é"
- *Substituição de "equivalentes tautológicos" numa tautologia* (a seguir designada abrev. de *SubEqTaut*):
  "Se P1 e P2 são "equivalentes tautológicos", significando tal que P1$\Leftrightarrow$P2 é uma tautologia, então, se substituirmos numa tautologia, uma ou mais ocorrências de P1 por P2, obtém-se uma tautologia".

A título ilustrativo, vejamos como poderíamos mostrar que (P1 $\wedge$ P2) $\Rightarrow$ P2 é uma tautologia (alínea vii) do exercício anterior), das duas maneiras referidas.

Construção da tabela de verdade de (P1$\wedge$P2)$\Rightarrow$P2:

P1	P2	P1 $\wedge$ P2	(P1$\wedge$P2)$\Rightarrow$P2
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Mostremos agora que (P1$\wedge$P2)$\Rightarrow$P2 é uma tautologia, recorrendo à via dedutiva, e assumindo que já se demonstrou que são tautologias as expressões referidas nas alíneas anteriores do mesmo exercício 4:

1) (P2 $\wedge$ P1) $\Rightarrow$ P2 é uma tautologia (pela alínea vi) do exercício 4);
2) (P2 $\wedge$ P1) $\Leftrightarrow$ (P1 $\wedge$ P2) é uma tautologia (pela alínea iii));
3) (P1 $\wedge$ P2) $\Rightarrow$ P2 é uma tautologia (sai de 1) e 2), por *SubEqTaut*, uma vez que (P1 $\wedge$ P2) $\Rightarrow$ P2 se obtém de (P2 $\wedge$ P1) $\Rightarrow$ P2 substituindo (P2 $\wedge$ P1) por (P1 $\wedge$ P2)).

Estas e outras técnicas de demonstração de tautologias (e não só) serão abordadas na disciplina de Lógica. *No que às tautologias diz respeito, o objectivo nesta disciplina é acima de tudo que um aluno seja capaz de olhar para uma expressão lógica e ("lendo-a") rapidamente conseguir determinar se está em presença de uma tautologia, ou não.*

∇

Como decorre da alínea iii) do exercício anterior, a ordem dos argumentos de uma conjunção é irrelevante, no sentido de que P1 $\wedge$ P2 é equivalente a P2 $\wedge$ P1 (quaisquer que sejam as proposições P1 e

[16] Embora eventualmente demorada se a expressão em causa contiver muitas subexpressões (pois é conveniente incuir na tabela uma coluna para cada subexpressão), ou se envolver muitos símbolos diferentes de proposições genéricas (pois se a expressão envolver *n* símbolos de proposições a tabela terá 2^n linhas).

[17] Está-se aqui a assumir que a expressão não envolve proposições concretas, sendo construída apenas à custa dos conectivos proposicionais e de símbolos denotando proposições genéricas (ver penúltima nota de rodapé).

P2) [18]. É igualmente irrelevante a ordem dos argumentos de uma disjunção ou de uma equivalência. Mas, como afirmámos atrás, já não é irrelevante a ordem dos argumentos de uma implicação (isto é, existem proposições P1 e P2 para as quais P1 ⇒ P2 não é equivalente a P2 ⇒ P1).

Exercício 5:

Verifique que (P1 ⇒ P2) ⇔ (P2 ⇒ P1) não é uma tautologia

∇

Abreviaturas úteis e omissão de parênteses em sequências de conectivos do mesmo tipo

Por outro lado, como a conjunção é associativa (no sentido de que P1∧(P2∧P3) é equivalente a (P1∧P2)∧P3), podemos omitir os parênteses em sequências de conjunções.

De qualquer forma, podemos assumir a definição a seguir (onde se fixa uma ordem pela qual são avaliadas sequências de conjunções, e se considera ainda sequências singulares, ou mesmo vazias, de conjunções):

- P1 ∧ ... ∧ Pn [19] é uma abreviatura de ⊤ (o elemento neutro para a conjunção), se n=0
- P1 ∧ ... ∧ Pn é uma abreviatura de (P1 ∧ ... ∧ Pn-1) ∧ Pn, se n≥1 (equivalente a P1, se n=1)

Analogamente se convenciona que:

- P1 ∨ ... ∨ Pn é uma abreviatura de ⊥ (o elemento neutro para a disjunção), se n=0
- P1 ∨ ... ∨ Pn é uma abreviatura de (P1 ∨ ... ∨ Pn-1) ∨ Pn, se n≥1 (equivalente a P1, se n=1)

Contudo, não se assume aqui qualquer convenção análoga para sequências de outros operadores binários do mesmo tipo, pelo que, em tais casos, não se poderão omitir parênteses interiores, no caso de haver uma sequência de mais do que um operador do mesmo tipo.

Mais precisamente, ao contrário do que se convenciona em alguns textos de Lógica, não interpretaremos aqui P1⇒P2⇒P3 como significando P1⇒(P2⇒P3), nem interpretaremos P1⇒P2⇒P3 como significando (P1⇒P2)⇒P3, assim como não interpretaremos P1⇔P2⇔P3 como significando P1⇔(P2⇔P3), nem como significando (P1⇔P2)⇔P3 [20].

De facto, seguiremos aqui antes a tradição usual em textos de Matemática, e interpretaremos P1⇔P2⇔P3, ou

---

[18] Quando se considera como argumentos de conjunções expressões que podem não ter um valor lógico definido, por a sua avaliação envolver situações de erro (por exemplo, divisões por zero), então nem sempre se assume (em certos contextos) que a conjunção é comutativa (ao contrário do que se passa em Matemática). Muitas linguagens de programação, como o *Mathematica* ou o *C*, assumem uma avaliação sequencial da conjunção (e da disjunção) em que a ordem é importante, em "situações de erro".

[19] Em vez de P1 ∧ ... ∧ Pn também se escreve por vezes (com o mesmo significado) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$ Pi ou $\bigwedge_{i=1}^{n}$ Pi (e analogamente para a disjunção).

[20] Como o conectivo ⇒ não é associativo (verifique), não é equivalente interpretar P1⇒P2⇒P3 como significando (P1⇒P2)⇒P3 ou como significando P1⇒(P2⇒P3). De qualquer forma, a interpretação que vamos dar (a seguir) a P1⇒P2⇒P3 não é equivalente a nenhuma dessas duas possíveis interpretações. No caso do conectivo ⇔, como este é associativo (verifique), já seria irrelevante interpretar P1⇔P2⇔P3 como significando (P1⇔P2)⇔P3 ou como significando P1⇔(P2⇔P3). Mas (tal como para a implicação) a interpretação que vamos dar a seguir P1⇔P2⇔P3 não é equivalente a essas interpretações.

$$\begin{array}{c} P1 \\ \Leftrightarrow \\ P2 \\ \Leftrightarrow \\ P3 \end{array}$$

como sendo uma abreviatura de (P1 $\Leftrightarrow$ P2) $\wedge$ (P2 $\Leftrightarrow$ P3). Mais geralmente, P1 $\Leftrightarrow$ P2 $\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ Pn (com n>2) será interpretado como significando (P1 $\Leftrightarrow$ P2) $\wedge$ ... $\wedge$ (Pn-1 $\Leftrightarrow$ Pn).

Analogamente, P1 $\Rightarrow$ P2 $\Rightarrow$ ... $\Rightarrow$ Pn (com n>2), ou

$$\begin{array}{ccc} P1 & \text{ou} & P1 \\ \Rightarrow & & \Downarrow \\ P2 & & P2 \\ \Rightarrow & & \Downarrow \\ \ldots & & \ldots \\ \Rightarrow & & \Downarrow \\ Pn & & Pn \end{array}$$

será interpretado como significando (P1 $\Rightarrow$ P2) $\wedge$ ... $\wedge$ (Pn-1 $\Rightarrow$ Pn).

Refira-se, contudo, que as abreviaturas anteriores não são em geral consideradas em textos de Lógica.

Algumas técnicas usuais de demonstração

Como decorre naturalmente da leitura de uma implicação P1 $\Rightarrow$ P2 ("se P1 então P2"), se soubermos (ou conseguirmos provar) que uma implicação P1 $\Rightarrow$ P2 é verdadeira, e se soubermos (ou conseguirmos provar) que o seu antecendente P1 também é verdadeiro, então podemos concluir que o consequente P2 é igualmente verdadeiro.

A esta regra de dedução , que se pode expressar escrevendo:

$$\frac{P1, P1 \Rightarrow P2}{P2}$$ (e que se lê: "de P1 e P1 $\Rightarrow$ P2 conclui-se P2")

é costume chamar de *Modus Ponens* (abreviadamente MP)[21]. Ela constitui o mais importante mecanismo de dedução no âmbito da chamada lógica proposicional.

A conclusão (da veracidade) de P2, por aplicação de MP, pressupõe, em particular, que a implicação P1$\Rightarrow$P2 é verdadeira. E, precisamente, muitos dos resultados que se pretende demonstrar em matemática consistem em provar que é verdadeira uma asserção com a forma de uma implicação. Justifica-se, assim, que nos debrucemos um pouco sobre a forma de provar este tipo de asserções.

Quando se pretende provar (que é verdadeira) uma implicação P $\Rightarrow$ Q, efectua-se em geral uma *dedução com hipóteses*, do seguinte tipo: assume-se que o antecedente P é verdadeiro, e tenta-se provar que (assumindo essa hipótese) o consequente Q também é verdadeiro[22].

---

[21] Podemos igualmente aplicar esta regra do MP sem saber que P1 (ou que P1$\Rightarrow$P2) é verdadeiro, mas admitindo tal como hipótese. Nesse caso, por aplicação da regra MP concluímos P2, mas não podemos dizer que demonstrámos que P2 é verdadeira. Em tal situação, a eventual veracidade de P2 fica condicionada à comprovação de que a(s) hipótese(s) assumidas (como verdadeiras) são, de facto, verdadeiras.

[22] Como se verá na disciplina de Lógica, quando se considera sistemas dedutivos para a lógica proposicional (em geral de natureza axiomática), ao resultado que estabelece que se "assumindo como hipótese que P1 é verdadeira, conseguirmos deduzir (nesse sistema) que P2 também é verdadeira", então podemos concluir que "P1$\Rightarrow$P2 é verdadeira", costuma-se chamar de *metateorema da dedução* (ou *metateorema da demonstração*).

De uma forma simples e esquemática, podemos dizer que em tal dedução[23] começa-se pela(s) hipótese(s) e constrói-se, sucessivamente, uma sequência de asserções, em que cada uma dessas asserções ou é um resultado já provado, ou sai de asserções anteriores por aplicação do Modus Ponens[24] (ou de uma outra regra de dedução), até se chegar à asserção cuja veracidade se pretende concluir (deduzir).

Uma outra técnica muito usual (em matemática) de demonstrar (que) uma implicação (é verdadeira), consiste no chamado *método de redução ao absurdo*: assume-se, como hipótese, que se verifica o antecedente e a negação do consequente (i.e. assume-se que o antecedente é verdadeiro e que o consequente é falso), e tenta-se mostrar que tal nos leva a uma contradição[25].

A base desta técnica reside na tautologia xxiv) do exercício 4:

> Pela tautologia xxiv), $P1 \Rightarrow P2$ é verdadeiro sse $P1 \wedge \neg P2 \Rightarrow \perp$ o for. Logo, provar que $P1 \Rightarrow P2$ é equivalente a provar que $P1 \wedge \neg P2 \Rightarrow \perp$, o que, de acordo com o que acabámos de observar acima, ficará provado se, assumindo como hipótese o seu antecedente (i.e. assumindo que se verifica P1 e que P2 é falso) se conseguir deduzir o seu consequente (i.e. uma contradição).

Outras técnicas específicas podem ser usadas para provar certo tipo de implicações. Por exemplo, para provar uma implicação da forma $(P1 \vee P2) \Rightarrow P$, faz-se normalmente uma *demonstração por casos*, demonstrando que quer P1 implica P, quer P2 implica P (a validade desta técnica decorre da tautologia xxiii), do mesmo exercício 4: $((P1 \Rightarrow P) \wedge (P2 \Rightarrow P)) \Leftrightarrow ((P1 \vee P2) \Rightarrow P))$.

Secção 2: Expressões com variáveis.

Expressões designatórias (termos com variáveis)

Além das designações e proposições que temos estado a considerar, a linguagem matemática usa constantemente expressões em que intervêm *variáveis*, i.e. símbolos (em geral letras, eventualmente seguidas ou indexadas por números) que podem ser substituídos por designações de acordo com determinadas regras. Nos casos habituais uma variável pode ser substituída por uma qualquer designação dos objectos de um determinado conjunto, chamado o *domínio* da variável em causa.

Por exemplo, as expressões

$$x\ ,\ (x - y)^2\ ,\ x^2 - 2xy + y^2$$

não são propriamente designações, mas converter-se-ão em designações (de números reais) se as letras que nelas figuram forem substituídas por números reais arbitrários; assim, se substituirmos[26] x por 1 e y por 0, as três expressões referidas converter-se-ão em designações do número 1.

---

[23] A problemática da demonstração será aprofundada na disciplina de Lógica. Aí se definirá com precisão o que se entende por uma "demonstração" ou "dedução" (sem ou com hipóteses), no âmbito de um sistema axiomático.

[24] Se uma asserção Q, dessa sequência, sai de asserções anteriores por aplicação do MP, então tais asserções anteriores terão necessariamente a forma P e $P \Rightarrow Q$.

[25] Uma técnica muito parecida, mas não exactamente igual, para provar que $P1 \Rightarrow P2$, consiste em assumir que o consequente P2 é falso e a partir daí deduzir que o antecedente P1 também o é. (Esta técnica baseia-se no facto, já referido, de uma implicação $P1 \Rightarrow P2$ ser equivalente ao seu contra-recíproco $\neg P2 \Rightarrow \neg P1$: tautologia xvii) do exercício 4.)

[26] Também se diz, com o mesmo significado, "se atribuirmos a x o valor 1 e a y o valor 0".

Às expressões com variáveis que se transformam em designações quando as variáveis que nelas figuram são substituídas por designações convenientes[27], chamaremos de *expressões designatórias* (ou *termos com variáveis*).

Duas expressões designatórias numa mesma variável x dizem-se *equivalentes* se todo o valor de x que converta alguma delas numa designação, converter a outra numa designação equivalente.

Por exemplo, são equivalentes *no conjunto dos reais* as expressões x e $\sqrt[3]{x^3}$, mas não o são as expressões $\sqrt{|x|}$ e $\sqrt{x}$ (substituindo x, por exemplo, por -1, a primeira converte-se numa designação do número 1 e a segunda num símbolo sem significado, no conjunto dos reais).

Evidentemente, a definição de equivalência é análoga no caso de expressões designatórias com mais de uma variável. Por exemplo, são equivalentes as expressões designatórias

$$(x - y)^2 \quad \text{e} \quad x^2 - 2xy + y^2$$

(supondo que x e y têm por domínio, por exemplo, o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais[28]). Tal expressa-se usualmente escrevendo $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

Expressões proposicionais (condições)

Consideremos agora as expressões:

$$x^2 > 0 \quad \text{e} \quad x^2 - y^2 = 0$$

Se em qualquer uma destas expressões substituirmos todas as variáveis por designações de números reais, obteremos desta vez, não designações, mas sim proposições, verdadeiras ou falsas.

As expressões com variáveis, que se transformam em proposições quando as variáveis são substituídas por designações convenientes, chamam-se *expressões proposicionais* ou *condições* (pode ser-se mais explícito e dizer que se trata de condições em, ou sobre, as variáveis envolvidas).

As expressões proposicionais podem também combinar-se por meio de operações lógicas inteiramente análogas às que considerámos no caso das proposições.

Sejam, por exemplo, P(x), P1(x) e P2(x) [29] expressões proposicionais com uma variável, no caso x.

A negação de P(x) é a condição $\neg$P(x) que é verdadeira para os valores de x que convertem P(x) numa proposição falsa. A conjunção, P1(x) $\wedge$ P2(x), é uma nova condição que se converte numa proposição verdadeira sse forem atribuídos a x valores que tornem verdadeiras as duas condições P1(x) e P2(x). A disjunção, P1(x) $\vee$ P2(x), é uma condição que é falsa apenas para os valores de x que tornem falsas ambas as condições P1(x) e P2(x). A implicação, P1(x) $\Rightarrow$ P2(x), é uma condição que se converte numa

---

[27] Por exemplo, para que a expressão designatória $\frac{y}{x}$ se converta numa designação de um número real não se pode substituir y e x por números reais arbitrários; da substituição de x por 0 não resultaria a designação de um número real (fosse qual fosse o valor atribuído à variável y).

[28] Em vez de dizer que x e y têm por domínio o conjunto dos reais, também se diz, com o mesmo sentido, que x e y são variáveis reais.

[29] É costume (embora não seja obrigatório) colocar entre parênteses (como parâmetro), a seguir à letra que identifica uma dada expressão proposicional, as variáveis que nela ocorrem (mais precisamente as variáveis que aí ocorrem livres: ver à frente). E, em vez de dizer que P(x) se transforma numa proposição verdadeira quando x é substituído por esse valor, também se diz que *esse valor satisfaz a condição (ou a propriedade)* P(x), ou que *a condição, ou propridedade,* P(x) *é verdadeira, ou se verifica, para esse valor de* x.

proposição falsa sse forem atribuídos a x valores que tornem verdadeira a condição P1(x) e falsa a condição P2(x). E a equivalência, P1(x) ⇔ P2(x), é uma condição que só é falsa para os valores de x que tornem verdadeira uma das condições, P1(x) ou P2(x), e falsa a outra.

O que se disse é trivialmente adaptável para o caso de expressões proposicionais com mais de uma variável. Mais ainda, nada impede que se utilize conectivos lógicos para combinar expressões proposicionais com diferentes variáveis, e não ocorrem quaisquer alterações de fundo ao que se acabou de dizer, em tal caso; por exemplo, P1(x) ∧ P2(y) é uma condição que é verdadeira para os valores de x e y que tornem verdadeiras as condições P1(x) e P2(y).

A generalidade da terminologia atrás referida, no âmbito das proposições, continua agora a poder aplicar-se a expressões proposicionais. Por exemplo: P1(x) é o antecedente, ou a condição antecedente, da implicação P1(x) ⇒ P2(x), e P2(x) é o seu consequente; o recíproco de uma implicação P1(x) ⇒ P2(x) é a implicação P2(x) ⇒ P1(x), e o contra-recíproco de P1(x) ⇒ P2(x) é a implicação ¬P2(x) ⇒ ¬P1(x).

Veracidade de uma condição

Existem, contudo, algumas diferenças importantes decorrentes do facto de que enquanto uma proposição ou é verdadeira ou falsa, uma expressão proposicional pode ser verdadeira para alguns valores das variáveis nela ocorrendo, e falsa para outros valores. Deste modo, afirmar que *uma condição é verdadeira* (ou que "se tem" uma certa condição) é usualmente entendido (e será neste texto entendido) como significando que sempre que substituirmos nessa expressão proposicional todas as variáveis por valores do respectivo domínio, obteremos uma proposição verdadeira[30].

Por exemplo, a condição:

$$x^2 > 0$$

é verdadeira no conjunto dos inteiros positivos (i.e. quando se considera que a variável x tem tal conjunto por domínio), mas já não é verdadeira no conjunto dos inteiros[31], uma vez que a substituição de x por 0 "*não satisfaz*" tal condição (i.e, não a transforma numa proposição verdadeira).

Considerando, por exemplo, como domínio o conjunto dos reais, são igualmente verdadeiras as condições:

i) $x > 2 \Leftrightarrow x+1 > 3$

ii) $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$

iii) $x > y \Rightarrow x > y$

---

[30] Estes dois níveis de associação de valores de verdade a uma expressão proposicional - dada uma particular atribuição de valores às variáveis e para uma qualquer atribuição de valores às variáveis - será melhor clarificado, e aprofundado, na disciplina de Lógica, aquando do estudo das lógicas de 1ª ordem.

[31] Não diremos contudo que tal condição é falsa no conjunto dos inteiros. Embora a terminologia a este respeito possa variar de autor para autor, pelo menos em alguns textos de Lógica diz-se que *uma condição é falsa* sse sempre que substituirmos nessa condição todas as variáveis por valores do respectivo domínio, obtemos uma proposição falsa. Quando se usa essa definição (que não é a mais usual em textos de outras áreas da Matemática), de ser falso (não ser verdade) que uma condição seja verdadeira (num certo domínio) não se pode concluir que ela seja falsa (nesse domínio). Para evitar confusões, procuraremos neste texto não classificar as condições de falsas.

iv) $x = x+1 \Rightarrow x > y$

v) $x = x+1 \Rightarrow x \leq y$

vi) $x > y \Rightarrow x = x$

vii) $x \leq y \Rightarrow x = x$

mas já não o é a condição:

viii) $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$

pois se atribuirmos a x o valor -1 e a y o valor -2 obtemos uma proposição ($-1 > -2 \Rightarrow (-1)^2 > (-2)^2$) que é falsa.

Tautologias

A veracidade das condições i) e ii) decorre das propriedades das operações e relação em questão. Pelo contrário, a veracidade da condição iii) é independente das propriedades que se assuma para a relação > e do domínio em causa: sejam quais forem os valores atribuídos às variáveis x e y, obtemos uma proposição que é uma tautologia (no caso em questão, da forma $P \Rightarrow P$).

Estas condições que têm a forma de uma tautologia[32], serão também designadas de *tautologias*. Naturalmente, qualquer tautologia é verdadeira.

Implicações trivialmente verdadeiras e "vacuosamente" verdadeiras

Considere-se agora as implicações iv) e v). Nestas asserções o mesmo antecedente implica, numa delas, uma certa condição, e, na outra, o seu contrário. Apesar disso, ambas as implicações são verdadeiras! E a razão é simples: como uma proposição da forma $P1 \Rightarrow P2$ é verdadeira sempre que o antecedente for falso, e como o antecedente das implicações iv) e v) é falso para quaisquer valores da variáveis em causa, concluímos que essas implicações são sempre verdadeiras (tal como é verdadeira, por exemplo, qualquer implicação da forma $1=2 \Rightarrow P$).

Costuma dizer-se que *uma implicação é "vacuosamente" verdadeira*, quando o seu antecedente é falso, para quaisquer valores das variáveis eventualmente envolvidas.

Igualmente são verdadeiras as implicações vi) e vii), apesar de nestas asserções o mesmo consequente ser implicado, numa delas, por uma certa condição, e, na outra, pelo seu contrário. A razão é igualmente simples: como uma proposição da forma $P1 \Rightarrow P2$ é verdadeira sempre que o consequente for verdadeiro, e como o consequente das implicações vi) e vii) é verdadeiro para quaisquer valores da variáveis em causa, concluímos que essas implicações são sempre verdadeiras (tal como é verdadeira, por exemplo, qualquer implicação da forma $P \Rightarrow 35=35$, independentemente do valor lógico do antecedente P).

Costuma dizer-se que *uma implicação é trivialmente verdadeira*, quando o seu consequente é verdadeiro (para quaisquer valores das variáveis eventualmente envolvidas).

Os casos interessantes não são naturalmente estes, mas sim os casos em que a veracidade do consequente depende da veracidade do antecedente, como por exemplo na condição ii) acima (ou na asserção "Se o João é marido da Antónia então a Antónia é mulher do João").

---

[32] Este conceito será definido com rigor na disciplina de Lógica. Para já, informalmente, podemos vê-lo como significando que quaisquer atribuições de valores às variáveis que ocorrem nessas condições as transformam em tautologias.

Condições necessárias e condições suficientes

Como dissemos na secção 1, quando uma proposição da forma P1 $\Rightarrow$ P2 é verdadeira, diz-se que P1 *implica* P2, ou que P1 é uma *condição suficiente* para P2, ou que P2 é uma *condição necessária* para P1.

A mesma terminologia continua a poder ser usada quando se considera expressões proposicionais (e não apenas proposições), desde que se tenha presente que uma *expressão proposicional (uma condição) é verdadeira* sse der origem a uma proposição verdadeira, seja qual for a atribuição às variáveis (nela ocorrendo) de valores dos respectivos domínios.

Assim, quando se afirma[33] que uma condição P1(x) *implica* uma condição P2(x) tal significa que a implicação P1(x) $\Rightarrow$ P2(x) é verdadeira (i.e. dá origem a uma proposição verdadeira, seja qual for o valor do domínio que se atribua à variável x). E com o mesmo sentido se diz que P1(x) é uma *condição suficiente* para P2(x), ou que P2(x) é uma *condição necessária* para P1(x).

Deste modo, por exemplo, a condição $x > y$ não é uma condição suficiente para $x^2 > y^2$, no domínio dos inteiros ou dos reais, embora já o seja se considerarmos, para as variáveis, o domínio dos naturais.

Analogamente, quando se afirma que uma condição P1(x) é *equivalente* a uma condição P2(x), ou que P1(x) é uma *condição necessária e suficiente* para P2(x), tal significa que a equivalência P1(x) $\Leftrightarrow$ P2(x) é verdadeira (seja qual for o valor do domínio que se atribua à variável x).

Substituição de equivalentes

De posse desta noção de equivalência entre duas condições, podemos então generalizar o importante resultado da substituição de proposições equivalentes numa proposição, como se segue:

Substituição de equivalentes:

"Se substituirmos numa expressão (seja ela uma proposição ou uma condição), uma das subexpressões que a compõem (seja ela uma proposição ou uma condição) por uma outra que lhe seja equivalente, obtemos uma expressão que é equivalente à inicial".

O conceito de implicação (e de equivalência) formal

Devido ao papel específico (fundamental) que as implicações e equivalências desempenham no discurso matemático, e como forma de evitar ambiguidades, em certas escolas do pensamento Matemático introduziu-se o conceito de *implicação formal* (respectivamente, *equivalência formal*) para traduzir que uma dada implicação (resp., equivalência) entre duas condições é verdadeira[34]. De acordo com tal terminologia, dizer que uma condição P1(x) implica formalmente uma condição P2(x) significa que a implicação P1(x)$\Rightarrow$P2(x) é verdadeira, i.e. transforma-se numa proposição verdadeira seja qual for o valor (do respectivo domínio) atribuído à variável x.

---

[33] Considera-se, a seguir, condições só com uma variável, mas o que se diz aí, e no que se segue, é válido para condições envolvendo mais variáveis.

[34] Usando-se por vezes o termo *implicação material* para se referir à implicação entre duas proposições. (Alguns autores põem um ponto por cima do sinal de implicação para denotar a implicação formal.)

No entanto, é vulgar na linguagem matemática usar-se, como atrás fizemos, apenas a palavra "implica" no sentido de "implica formalmente". Tal procedimento comum será aqui seguido, uma vez que o próprio contexto permite, em geral, reconhecer com facilidade o que se pretende exprimir com tal palavra.

Ambiguidades

Contudo, a não utilização de termos que expressem directamente o conceito de "uma condição ser verdadeira" (papel desempenhado pelo termo "implica formalmente" quando se trata de uma condição com a forma de uma implicação) pode dar origem a ambiguidades que em certas situações podem ser perigosas[35]. Nomeadamente, é preciso ter muito cuidado quando se negam implicações ou equivalências, ou quando se assumem condições.

Negação de implicações (e equivalências)

Em vez de dizer que "não é verdade que uma condição P1(x) implique uma condição P2(x)", diz-se muitas vezes que "P1(x) não implica P2(x)", o que por vezes se denota escrevendo P1(x) $\not\Rightarrow$ P2(x).

A expressão P1(x) $\not\Rightarrow$ P2(x) (i.e. "P1(x) não implica P2(x)") deve ser interpretada com cuidado !

Quando se escreve P1(x) $\not\Rightarrow$ P2(x) o que se está a negar é que "P1(x) implique P2(x)", no sentido de negar que a "implicação P1(x) $\Rightarrow$ P2(x) é verdadeira" (i.e. negar que "P1(x) $\Rightarrow$ P2(x) dá origem a uma proposição verdadeira, seja qual for o valor do domínio que se atribua à variável x"). Assim, afirmar P1(x) $\not\Rightarrow$ P2(x) significa que existem valores de x para os quais P1(x)$\Rightarrow$P2(x) não se verifica, o que não é o mesmo que afirmar que "é verdadeira a condição $\neg$(P1(x)$\Rightarrow$P2(x))", o que corresponderia a afirmar que fosse qual fosse o valor de x, P1(x)$\Rightarrow$P2(x) não se verificava.

Assim, por exemplo (considerando agora condições com duas variáveis), afirmar que, no domínio dos reais, $x > y \not\Rightarrow x^2 > y^2$, corresponde a afirmar que podemos atribuir a x e y *alguns* valores reais, para os quais (não se tem que $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$, i.e. para os quais) se tem $x > y$ e $x^2 \leq y^2$, *e não que, seja quais forem os valores reais que x e y tomem*, não se tem que $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$.

Comentários análogos podem ser feitos a propósito da negação de equivalências.

Assumpção de condições

Uma outra situação em que a não utilização de termos que expressem directamente o conceito de "uma condição ser verdadeira" pode dar origem a ambiguidades que podem ser perigosas (e em que é peciso ter muito cuidado na sua interpretação), é quando se assumem condições.

---

35 Como veremos na próxima secção, *se quantificarmos todas as variáveis ocorrendo numa expressão proposicional (transformando-a numa proposição) tal problema deixará de existir*. Mas é prática muito generalizada escrever expressões proposicionais com variáveis livres, assumindo-as implicitamente universalmente quantificadas (conceitos a definir à frente).

Quando se trabalha a Lógica Matemática de uma forma mais formal, como se fará na disciplina de Lógica, estes problemas não existem, pois são introduzidos símbolos (na meta-linguagem) para expressar (de uma forma sintética) que uma certa expressão proposicional é verdadeira numa dada interpretação (da linguagem objecto). As considerações feitas nesta nota de rodapé poderão não ser claras para a generalidade dos leitores; no entanto, o seu aprofundamento, de momento, seria prematuro.

De facto, supondo, por exemplo, que estamos a trabalhar no domínio dos reais e que θ designa uma operação binária (cujo modo de operar é irrelevante para o que se segue), então uma afirmação do tipo:

a) "Suponha-se que $x=0 \vee x\theta 1=1$"

será normalmente interpretada como significando que se está a considerar que x denota o 0 ou um real (qualquer) que satisfaça $x\theta 1=1$.

Pelo contrário, *apesar* da condição $x=0 \vee x\theta 1=1$ ser (formalmente) equivalente à condição $x\neq 0\Rightarrow x\theta 1=1$, uma afirmação do tipo:

b) "Suponha-se que $x\neq 0 \Rightarrow x\theta 1=1$"

será normalmente interpretada como significando que todo o real diferente de zero satisfaz a igualdade $x\theta 1=1$.

As afirmações:

a1) "Seja x tal que $x=0 \vee x\theta 1=1$"

e

b1) "Suponha-se que, qualquer que seja x, se tem que $x\neq 0 \Rightarrow x\theta 1=1$"
(ou, "Suponha-se que $x\neq 0$ implica formalmente $x\theta 1=1$")

traduzem, de forma muito mais clara, o significado que é normalmente atribuído às afirmações a) e b).

A asserção em b1) é normalmente efectuada em Matemática, de uma forma mais sintética, recorrendo a quantificadores (universais).

Secção 3: Quantificadores.

Quantificador universal e quantificador existencial

Se, numa dada condição P(x), atribuirmos à variável x um dos valores do seu domínio, obteremos, como vimos, uma proposição. Outra forma, extremamente importante em matemática, de obter proposições a partir de uma condição P(x), é antepor-lhe um dos símbolos $\forall_x$ ou $\exists_x$, que se chamam *quantificadores* (*quantificador universal* e *quantificador existencial*, respectivamente), no caso sobre a variável x.

A proposição $\forall_x P(x)$ lê-se "qualquer que seja x, P(x)" ou "para todo o x, tem-se P(x)" e é verdadeira sse, atribuindo a x um qualquer valor do seu domínio, P(x) se converter sempre numa proposição verdadeira. A proposição $\exists_x P(x)$ que se lê "existe (pelo menos) um x tal que P(x)" ou "para algum x, tem-se P(x)" é falsa sse P(x) se transformar numa proposição falsa sempre que à variável x seja atribuído um valor qualquer do seu domínio.

Da leitura anterior, facilmente decorre a veracidade das importantes equivalências a seguir (conhecidas pelas *segundas leis de De Morgan*):

$$\neg\forall_x P(x) \Leftrightarrow \exists_x \neg P(x)$$

$$\neg\exists_x P(x) \Leftrightarrow \forall_x \neg P(x)$$

Estas leis dizem-nos que podemos passar uma negação de fora para dentro de um quantificador, trocando o tipo de quantificador (passando um quantificador universal a existencial, e vice-versa). Utilizando estas leis podemos em geral fazer desaparecer eventuais negações que ocorram numa expressão (passando de uma expressão com negações a uma outra equivalente onde estas não ocorram), como se ilustra a seguir:

Exemplo 1:

a) $\neg \exists_x\ x<1$

$\Leftrightarrow$ (segundas leis de De Morgan)

$\forall_x \neg\ x<1$

$\Leftrightarrow$ (substituição de equivalentes, pois $\neg x<1$ é equivalente[36] a $x\geq 1$)

$\forall_x\ x\geq 1$

b) $\neg \forall_x\ (x>1 \Rightarrow x^2>1)$

$\Leftrightarrow$ (segundas leis de De Morgan)

$\exists_x \neg(x>1 \Rightarrow x^2>1)$

$\Leftrightarrow$ (substituição de equivalentes)

$\exists_x\ (x>1 \wedge \neg\ x^2>1)$

$\Leftrightarrow$ (substituição de equivalentes)

$\exists_x\ (x>1 \wedge x^2\leq 1)$

c) (Um exemplo mais, agora com duas quantificações)

$\neg \forall_x \exists_y\ y<x$

$\Leftrightarrow$ (segundas leis de De Morgan)

$\exists_x \neg \exists_y\ y<x$

$\Leftrightarrow$ (segundas leis de De Morgan e substituição de equivalentes)

$\exists_x \forall_y \neg\ y<x$

$\Leftrightarrow$ (substituição de equivalentes)

$\exists_x \forall_y\ y\geq x$

∇

Observação 1 (os dois tipos de quantificadores são duais):

As segundas leis de De Morgan são equivalentes[37] às asserções seguintes

$$\forall_x P(x) \Leftrightarrow \neg\exists_x \neg P(x)$$

$$\exists_x P(x) \Leftrightarrow \neg\forall_x \neg P(x)$$

que traduzem que o operador $\forall_x$ tem o mesmo significado que a sequência de operadores $\neg\exists_x\neg$ e, vice-versa, $\exists_x$ tem o mesmo significado que $\neg\forall_x\neg$, facto que se costuma exprimir dizendo que os operadores $\forall_x$ e $\exists_x$ são *duais*.

∇

---

36 Subentende-se, neste exemplo, que os domínios das variáveis são conjuntos de números (p.ex. naturais, ou inteiros, ou reais) e que < denota a usual relação de ordem nesses conjuntos de números (sobre as relações de ordem, ver capítulo 3).

37 Verifique que $(\neg P1 \Leftrightarrow P2) \Leftrightarrow (P1 \Leftrightarrow \neg P2)$ é uma tautologia.

Como ilustração de proposições verdadeiras, envolvendo quantificações, tem-se, por exemplo, supondo que x é uma variável real (i.e. que x tem por domínio o conjunto dos reais):

$$\forall_x\, x^2 + 1 > 0 \ , \ \exists_x\, x^4 \leq 0 \ \text{ e } \ \exists_x\, x^2 - 3 = 0$$

Alcance de um quantificador

Numa expressão $\forall_x P(x)$ diz-se que P(x) é o alcance do quantificador $\forall_x$, $\forall$ é o símbolo do quantificador universal e x é a variável alvo da quantificação universal (i.e. que está a ser quantificada). Terminologia análoga é usada para expressar as componentes de $\exists_x P(x)$.

Refira-se que quando a condição quantificada não é uma condição atómica, deve-se colocar essa condição entre parênteses antes de lhe antepor os quantificadores, *uma vez que assumiremos neste texto* que os operadores unários (como $\forall_x$, $\exists_x$ e $\neg$) têm prioridade (precedência) sobre os restantes operadores[38]. Assim, enquanto que na expressão $\forall_x(x>1 \Rightarrow x^2 >1)$ o alcance do quantificador $\forall_x$ é a expressão $(x>1 \Rightarrow x^2 >1)$, se escrevermos $\forall_x x>1 \Rightarrow x^2 >1$, então o alcance do quantificador $\forall_x$ será apenas a expressão $x>1$.

Domínio da quantificação

Dada uma condição P(x) concreta (por exemplo $x\geq 0$), para sabermos se $\forall_x P(x)$ (ou se $\exists_x P(x)$) é verdadeira temos de saber qual o domínio que está a ser considerado para a variável alvo da quantificação[39] (a que podemos chamar o *domínio da* quantificação). Normalmente tal é explicitado, dizendo-se por exemplo que x é uma variável natural (ou inteira, ou real), ou está implícito[40], deduzindo-se p.ex. do contexto.

Quando afirmamos que uma dada expressão genérica, envolvendo quantificadores, é verdadeira, sem nada dizer que permita subentender quais os domínios considerados para as variáveis (como quando afirmámos atrás que era verdadeira a equivalência $\neg\forall_x P(x) \Leftrightarrow \exists_x \neg P(x)$), assume-se que tal expressão é verdadeira seja qual for o domínio que se considere[41], assumindo-se em geral também, se nada se disser em contrário, que se a expressão envolver mais do que uma variável, todas as variáveis têm o mesmo domínio[42].

---

38 No entanto, é de frisar que nem todos os autores assumem esta regra de precedência no que respeita às quantificações (assumindo alguns, nomeadamente, que os conectivos proposicionais têm precedência sobre os quantificadores).

39 Por exemplo, $\forall_x\, x\geq 0$ é verdadeira no domínio dos naturais, mas não o é no domínio dos inteiros.

40 Refira-se, a propósito, que algumas letras são normalmente associadas a certos tipos de variáveis. Embora não se pretenda aqui estabelecer quaisquer convenções rígidas a esse respeito, assumiremos contudo, seguindo uma prática mais ou menos usual, que em princípio (se nada for dito em contrário) as letras *i*, *j*, *k*, *l*, *m*, *n*, *p* e *q* designam variáveis inteiras. Isto não impede que outras letras não possam também ser usadas para designar variáveis inteiras, mas tal já terá de ser explicitado.

41 Suposto apenas ser um conjunto não vazio.

42 Saliente-se que em vez de dizer que se tem $\forall_x P(x)$, com x (p.ex.) uma variável natural, podemos sempre assumir que o domínio da variável x é um qualquer conjunto (não vazio e onde estejam definidas as eventuais operações referidas em P(x)), e exprimir na própria expressão simbólica que se está a considerar como domínio da quantificação o conjunto dos naturais, descrevendo que para a análise da veracidade de P(x) apenas os naturais são relevantes, através de uma quantificação da forma $\forall_x(x\in \mathbb{N}_0 \Rightarrow P(x))$. Analogamente, podemos seguir a mesma estratégia para associar diferentes domínios a diferentes quantificações (desde que disponhamos de símbolos para denotar esses domínios). Por exemplo, a asserção "qualquer que seja o real existe um natural maior que ele" pode ser traduzida simbolicamente p.ex. como se segue: $\forall_x(x\in \mathbb{R} \Rightarrow \exists_y(y\in \mathbb{N}_0 \wedge y>x))$.

Outras notações e abreviaturas úteis

Antes de prosseguir, refira-se que a notação usada para expressar as quantificações pode variar, ligeiramente, de autor para autor. Nomeadamente, em vez de

$$\forall_x\, P(x) \;\text{ e }\; \exists_x\, P(x)$$

também se usa, respectivamente:

$$(\forall x)\, P(x) \quad \text{e} \quad (\exists x)\, P(x)$$

Mais ainda, em alguns textos matemáticos por vezes a quantificação (nomeadamente a quantificação universal) ocorre depois da condição que se está a quantificar, p.ex. em asserções do tipo:

"Tem-se $P(x)$, $\forall_x$"

Por outro lado, é de observar que é muito frequente ocorrerem expressões matemáticas em que uma quantificação universal é seguida de uma implicação e uma quantificação existencial é seguida de uma conjunção[43]. Tal levou, no desejo de arranjar notações cada vez mais sintéticas, a que se tenham procurado abreviaturas para tais situações. Assim, por exemplo, expressões do tipo:

$$\forall_{x:P1(x)}\, P2(x) \quad \text{e} \quad \exists_{x:P1(x)}\, P2(x)$$

(que podem ser lidas, informalmente, como se segue: "para todo o x tal que P1(x), tem-se P2(x)" e "existe um x tal que P1(x), que verifica P2(x)"), são vistas como abreviaturas de:

$$\forall_x\, (P1(x) \Rightarrow P2(x)) \quad \text{e} \quad \exists_x\, (P1(x) \wedge P2(x))$$

Mais ainda, nos casos, como o anterior, em que a condição P1 só envolve a variável x (ou em que é evidente, pelo contexto, que é a variável x que está a ser alvo da quantificação), pode mesmo escrever-se, simplesmente:

$$\forall_{P1(x)}\, P2(x) \quad \text{e} \quad \exists_{P1(x)}\, P2(x)$$

Assim, as expressões, por exemplo:

$$\forall_{x>1}\, x^2 >1 \quad \text{e} \quad \exists_{x\neq 0}\, x^2 = x$$

são abreviaturas das proposições (verdadeiras no domínio dos reais):

$$\forall_x\, (x>1 \Rightarrow x^2 >1) \quad \text{e} \quad \exists_x\, (x\neq 0 \wedge x^2 = x)$$

Refira-se, ainda, que não só (como observámos) é muito frequente ocorrerem expressões matemáticas em que uma quantificação universal é seguida de uma implicação e uma quantificação existencial é seguida de uma conjunção, como se tem que a negação de uma expressão de um desses tipos dá origem a uma expressão do outro tipo. Assim, por exemplo (facto cuja demonstração se deixa como exercício):

$$\neg\forall_{P1(x)}\, P2(x) \Leftrightarrow \exists_{P1(x)}\neg P2(x) \qquad (\text{isto é, } \neg\forall_x(P1(x) \Rightarrow P2(x)) \Leftrightarrow \exists_x\, (P1(x) \wedge \neg P2(x))$$

$$\neg\exists_{P1(x)}\, P2(x) \Leftrightarrow \forall_{P1(x)}\, \neg P2(x) \qquad (\text{isto é, } \neg\exists_x\, (P1(x) \wedge P2(x) \Leftrightarrow \forall_x(P1(x) \Rightarrow \neg P2(x)))$$

Trocas de quantificadores

A definição e o uso de quantificadores, no caso de condições com mais de uma variável, são inteiramente análogos. Assim, p.ex. $\forall_x\exists_y y<x$ lê-se "qualquer que seja x, existe (pelo menos) um y tal que y<x". Supondo x e y variáveis reais, trata-se de uma proposição verdadeira (mas já não o seria, se estivéssemos a considerar x e y variáveis naturais, pois nos naturais o zero é menor ou igual que todos os naturais).

---

[43] Veja-se, por exemplo, a última nota de rodapé.

Considere-se agora a proposição $\exists_y \forall_x y<x$, que se obtém da anterior trocando a posição dos dois quantificadores. Continuando a supor x e y variáveis reais, esta proposição exprime a existência de um número real menor do que qualquer outro (e até menor do que ele próprio), pelo que é obviamente falsa.

Assim, como acabámos de ver, trocando a posição dos dois quantificadores que intervêm na proposição $\forall_x \exists_y y<x$, obtém-se uma proposição <u>não</u> equivalente. Este facto verifica-se correntemente, quando os quantificadores são de tipo diferente (um universal e outro existencial).

Em contrapartida, a permutação de quantificadores do mesmo tipo conduz sempre a uma expressão equivalente à inicial. Isto é, são verdadeiras as equivalências a seguir (onde P(...) significa que podem ser quaisquer as variáveis ocorrendo na condição P, e não necessariamente x e y, ou apenas x e y):

$$\forall_x \forall_y \, P(...) \;\Leftrightarrow\; \forall_y \forall_x \, P(...)$$

$$\exists_x \exists_y \, P(...) \;\Leftrightarrow\; \exists_y \exists_x \, P(...)$$

Assim, por exemplo, são equivalentes as proposições[44]:

$$\forall_x \forall_y \, (x^3 = y^3 \Leftrightarrow x=y)$$

$$\forall_y \forall_x \, (x^3 = y^3 \Leftrightarrow x=y)$$

Refira-se ainda que sequências de quantificadores do mesmo tipo, como:

$$\forall_x \forall_y \, P(...) \quad \text{ou} \quad \exists_x \exists_y \, P(...)$$

são por vezes abreviadas escrevendo, respectivamente:

$$\forall_{x,y} \, P(...) \quad \text{e} \quad \exists_{x,y} \, P(...)$$

Por outro lado, embora quantificadores de tipo diferente não possam em geral permutar, verifica-se, contudo, a seguinte implicação (i.e. tal implicação é sempre verdadeira):

$$\exists_x \forall_y \, P(...) \Rightarrow \forall_y \exists_x \, P(...)$$

<u>Observação 2</u>:

Procuremos perceber melhor porque é que se tem $\exists_x \forall_y P(...) \Rightarrow \forall_y \exists_x P(...)$, mas não $\forall_y \exists_x P(...) \Rightarrow \exists_x \forall_y P(...)$.

a) Comecemos por mostrar (informalmente) que se tem $\exists_x \forall_y P(x,y) \Rightarrow \forall_y \exists_x P(x,y)$.

Suponha-se então que se tem (*) $\exists_x \forall_y P(x,y)$ e procuremos mostrar que se tem $\forall_y \exists_x P(x,y)$.

Seja então a um qualquer valor do domínio em consideração. Precisamos de mostrar que existe um valor b do domínio tal que se tem $P(b,a)$ [45]. Repare-se que o valor b em causa pode depender (e em geral depende) do a. Por essa razão, por vezes escreve-se $b(a)$, de modo a salientar (e sugerir) que é função de a.

Mas, por (*), existe um valor c do domínio tal que, qualquer que seja o valor d do domínio que se considere, se verifica $P(c,d)$. Logo, em particular, verifica-se $P(c,a)$. Mas então o valor $b(a)=c$ serve os nossos intentos.

---

[44] Note-se que cada uma das proposições é verdadeira no caso de x e y serem variáveis reais. Cada uma delas seria, contudo, falsa se se tratasse de variáveis complexas. De qualquer forma, em qualquer dos casos seria sempre legítima a permutação dos dois quantificadores universais, no sentido de que as duas proposições seriam equivalentes.

[45] Poderíamos usar y e x (em vez de a e b) para designar esses valores. Mas convém pelo menos usar letras diferentes para denotar os valores "prometidos" por $\forall_y \exists_x P(x,y)$ e por $\exists_x \forall_y P(x,y)$.

b) Repare-se agora porque é que o mesmo raciocínio não nos permite provar que $\forall_y \exists_x P(x,y) \Rightarrow \exists_x \forall_y P(x,y)$. Suponha-se então que se tem (**)$\forall_y \exists_x P(x,y)$ e procuremos mostrar que se tem $\exists_x \forall_y P(x,y)$.

Por (**), qualquer que seja o valor *a* do domínio que se considere, existe um valor *b(a)* do domínio para o qual se verifica P(*b(a),a*). Mas tal não nos garante que exista um valor *c* do domínio que verifique P(*c,a*) para todo o valor *a* do domínio, como seria necessário para se ter $\exists_x \forall_y P(x,y)$.

E é fácil de arranjar um contra-exemplo que mostra que $\forall_y \exists_x P(x,y) \Rightarrow \exists_x \forall_y P(x,y)$ não é verdadeira, pelo menos para algumas condições P(x,y). Por exemplo, como observámos atrás:

$\forall_x \exists_y \, y<x \;\not\Rightarrow\; \exists_y \forall_x \, y<x$

pois, considerando p.ex. o domínio dos reais (ou dos inteiros), embora dado um real x qualquer, exista sempre um real y tal que y<x (basta considerar y = x-1), não é verdade que exista um real *c* que seja menor que todos os reais (para o ver basta notar que $c \not< c$, ou que $c \not< (c-0.5)$, $c \not< (c-1)$, etc.).

∇

"Existe um e um só ..."

A utilização de quantificadores, juntamente com os conectivos lógicos, permite expressar formalmente a generalidade das asserções comuns em Matemática.

Por exemplo, a asserção "*existe um e um só* valor de x que satisfaz (i.e. torna verdadeira) a condição P(x)", ou (mais informalmente) "existe um e um só x tal que P(x)", pode ser expressa pela proposição:

$$\exists_x P(x) \wedge \forall_x \forall_y \, (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x=y)$$

(ou pela proposição, equivalente: $\exists_x (P(x) \wedge \forall_y (P(y) \Rightarrow y=x))$)

A importância de asserções deste tipo em Matemática (acerca da existência de "soluções únicas para uma certa condição") levou mais uma vez a que se procurassem abreviaturas sintéticas para as expressões complexas que as traduzem. Assim, é frequente a utilização da expressão

$$\exists^1_x \, P(x)$$

como abreviatura da proposição anterior.

Mudanças de variáveis

É bem conhecido que os símbolos que são usados para variáveis não são relevantes, e que, em princípio, numa proposição podemos substituir todas as ocorrências de uma variável por outra variável, que se obtém uma proposição equivalente.

No entanto, há que ter algum cuidado quando nessa proposição ocorre mais do que um quantificador, uma vez que, ao substituir uma variável por outra, há o perigo de se criar interacções com os quantificadores que antes dessa substituição não existiam. Por exemplo, supondo x e y variáveis reais, se substituirmos x por y na proposição $\forall_x \exists_y y<x$ (que já vimos ser verdadeira), obtemos uma proposição, $\forall_y \exists_y y<y$, que é falsa.

A substituição de uma variável (i.e. de todas as suas ocorrências) numa proposição, não é contudo problemática, obtendo-se uma proposição equivalente, se a variável for substituída por uma outra variável que não ocorra nessa proposição.

Ocorrências livres e mudas de uma variável e variáveis livres

Já vimos que podemos combinar proposições recorrendo aos operadores lógicos (conectivos proposicionais), obtendo novas proposições; podemos combinar expressões proposicionais, recorrendo aos mesmos operadores lógicos, obtendo novas expressões proposicionais; podemos transformar expressões proposicionais em proposições, quer substituindo as variáveis por designações convenientes, quer quantificando-as (i.e. antepondo à expressão quantificadores sobre as suas variáveis). Podemos ainda, naturalmente, combinar proposições com expressões proposicionais, obtendo novas expressões proposicionais. Nada de essencialmente novo decorre dessas combinações, quanto ao seu significado. No entanto, quando combinamos expressões proposicionais com proposições, obtemos expressões em que uma mesma variável pode em certos sítios da expressão estar a ser alvo de uma quantificação, e noutros não. É assim útil introduzir alguma terminologia que nos permita distinguir e falar dessas situações.

Diz-se que *uma ocorrência de uma variável* (por exemplo) x, numa expressão (expressão proposicional ou proposição), *está muda*, ou *ligada* a um quantificador, se se trata da ocorrência de x em $\forall_x$, ou em $\exists_x$, ou se essa ocorrência de x está nessa expressão no alcance de algum quantificador $\forall_x$ ou $\exists_x$. *Uma ocorrência* de x numa expressão que não está muda, *diz-se livre*. E diz-se que *uma variável está livre* numa expressão se admite alguma ocorrência livre nessa expressão.

Por exemplo, na expressão proposicional:

$$\exists_x (x^2=x \land \forall_y (y^2=y \Rightarrow y=x)) \land x > 0$$

as ocorrências de y estão todas mudas, e todas as ocorrências de x estão mudas, com excepção da última que está livre. Assim, a variável x está livre na expressão, mas a variável y não. Não existe qualquer relação entre a última ocorrência de x e a quantificação que está a incidir sobre x na proposição $\exists_x(x^2=x \land \forall_y (y^2=y \Rightarrow y=x))$. Se substituíssemos todas as ocorrências mudas de x por uma outra variável z (não ocorrendo na expressão), obtínhamos uma expressão:

$$\exists_z (z^2=z \land \forall_y (y^2=y \Rightarrow y=z)) \land x > 0$$

equivalente à inicial.

O valor de verdade de uma expressão proposicional só poderá depender do valor que assumem as variáveis livres nessa expressão[46]. Por essa razão (para salientar esse aspecto), quando se considera expressões proposionais, a seguir ao símbolo que identifica a expressão, só se costuma pôr entre parênteses as variáveis livres. Assim, em geral P(x) designa uma condição em que a única variável livre é x. E, supondo que o termo t é uma designação conveniente para substituir x, então pode escrever-se P(t) para designar a proposição que se obtém quando *as ocorrências livres de* x *em* P(x) *são substituídas por* t; só essas ocorrências de x são substituídas por t !

Assim, por exemplo, se P(x) designar a expressão proposicional:

$$\exists_x (x^2 =1 \land \forall_y (y^2 =1 \Rightarrow y=x)) \land x > 2$$

então P(5) designa a proposição (verdadeira nos naturais e falsa nos inteiros):

$$\exists_x (x^2 =1 \land \forall_y (y^2 =1 \Rightarrow y=x)) \land 5 > 2$$

---

[46] Repare-se que uma variável só pode ocorrer livre numa expressão proposicional. Numa proposição não ocorrem variáveis livres.

e P(1) designa a proposição (falsa nos naturais e nos inteiros):

$$\exists_x \,(\, x^2 = 1 \wedge \forall_y \,(y^2 = 1 \Rightarrow y=x)\,)\, \wedge\, 1 > 2$$

Termo livre para uma variável

Mais ainda, numa proposição da forma $\forall_x P(x)$ (ou da forma $\exists_x P(x)$), apenas as ocorrências livres de x em P(x) estão a ser alvo da quantificação $\forall_x$. A leitura de $\forall_x P(x)$ como "para todo o x, tem-se P(x)" deve ser interpretada como significando que se substituirmos todas as ocorrências livres de x em P(x) por um qualquer valor do domínio dessa variável, se obtém uma proposição verdadeira.

Usando a notação acima, pode dizer-se que a implicação a seguir é verdadeira[47]:

$$\forall_x P(x) \Rightarrow P(t)$$

para qualquer designação t conveniente.

A implicação anterior ainda é verdadeira, se permitirmos que t possa ser uma variável ou uma outra expressão designatória (onde ocorram variáveis), e não apenas uma designação[48], mas nesse caso há que ter cuidado para evitar que a substituição de x por t introduza interacções com os quantificadores que não existiam antes. Por exemplo, a proposição (verdadeira nos inteiros) $\forall_x \exists_y y<x$ não pode implicar $\exists_y y<y$; tal como a proposição (verdadeira nos humanos) $\forall_x \exists_y$ (y é mãe de x) não pode implicar $\exists_y$(y é mãe de y).

Mais precisamente, se t for uma expressão designatória (isto é, um termo com variáveis), ainda é verdadeira a implicação:

$$\forall_x P(x) \Rightarrow P(t)$$

desde que x não ocorra livre em P(x) no alcance de uma quantificação sobre uma variável ocorrendo em t, situação que pode ser descrita dizendo que "t *está livre para* x *em* P(x)" [49].

Dizer que t está livre para x em P(x) significa, informalmente, que se pode substituir, em P(x), x (ou, mais precisamente, todas as ocorrências livres de x) por t, "livremente" (no sentido de "à vontade", por tal substituição não introduzir interacções com os quantificadores que não existiam antes).

Exemplo 2:

Seja P(x) a expressão:

$$\exists_y \,(\, x < y \wedge \forall_x \forall_z (x < z \Rightarrow x+5 = z+5) \wedge \exists_u\, x = 2u \,)$$

Então:

- x está livre para x em P(x)

---

[47] A implicação anterior é ainda verdadeira se em P ocorrerem outras variáveis livres, para além de x, o que podemos exprimir escrevendo (onde os ... estão a designar outras variáveis): $\forall_x P(x,...) \Rightarrow P(t,...)$. Refira-se ainda, a propósito, que nada nos impede de quantificarmos uma expressão (expressão proposicional ou proposição) sobre variáveis que nela não ocorrem. No entanto, o efeito de tal quantificação é "nulo", no sentido de que a expressão quantificada é sempre equivalente à inicial.

[48] Quer as designações quer as expressões designatórias são usualmente designadas de termos. Seguindo esta nomenclatura, podemos ver as designações como termos sem variáveis, também designados de *termos fechados*.

[49] É fácil de verificar que se em t não ocorrem variáveis, então t está sempre livre para x em P(x). Assim, pode dizer-se, de forma geral, que (quer t seja um termo com variáveis, ou sem variáveis), a implicação $\forall_x P(x) \Rightarrow P(t)$ é verdadeira, desde que t esteja livre para x em P(x).

- (a variável) k está livre para x em P(x)
- y não está livre para x em P(x)
- z está livre para x em P(x)
- x+u não está livre para x em P(x)
- x+z está livre para x em P(x)

∇

Observe-se que uma variável que não ocorra em P(x) está sempre livre para x em P(x). Por outro lado, a variável x está também sempre livre para x (i.e. para si própria) em P(x).

De novo a veracidade de uma condição

Dissemos atrás que uma condição é verdadeira sse sempre que substituirmos nessa condição todas as variáveis por valores do respectivo domínio, obtemos uma proposição verdadeira.

Podemos agora ser mais precisos e dizer que *uma condição é verdadeira* sse sempre que substituirmos nessa condição todas as ocorrências livres das variáveis (e só essas ocorrências) por valores do respectivo domínio, obtemos uma proposição verdadeira (subentendendo-se que diferentes ocorrências livres de uma mesma variável devem ser substituídas pelo mesmo valor).

Fecho universal

Como já vimos, uma maneira de transformar uma expressão proposicional numa proposição consiste em antepor-lhe quantificadores sobre todas as suas variáveis livres. À proposição que se obtem deste modo, quando todas as variáveis livres numa expressão proposicional P(...) são quantificadas universalmente, chama-se o *fecho universal* de P(...). (Por exemplo, o fecho universal de P(x,y,z) é a proposição $\forall_x\forall_y\forall_z P(x,y,z)$, que podemos abreviar por $\forall_{x,y,z}P(x,y,z)$.)

Facilmente se observa que P1(x) *implica formalmente* P2(x) sse o fecho universal de P1(x) $\Rightarrow$ P2(x), i.e. $\forall_x(P1(x) \Rightarrow P2(x))$, for uma proposição verdadeira, e que P1(x) é *formalmente equivalente* a P2(x) sse o fecho universal de P1(x) $\Leftrightarrow$ P2(x), i.e. $\forall_x(P1(x) \Leftrightarrow P2(x))$, for uma proposição verdadeira. Assim, por exemplo (mas não usando agora a expressão "implicação formal"), afirmar que (é verdadeira a condição) $x>0 \Rightarrow x\geq 1$ é equivalente a afirmar que $\forall_x(x>0 \Rightarrow x\geq 1)$, expressão que evita qualquer ambiguidade.

Mais geralmente, *uma condição é verdadeira* sse o seu fecho universal for uma proposição verdadeira.

Mas atenção, que não é verdade que uma condição seja sempre equivalente ao seu fecho universal; tal só se verificará se o valor de verdade dessa condição não depender dos valores que podem assumir as suas variáveis livres.

Considere-se, por exemplo, o domínio dos inteiros positivos e a condição:

$$x > 0$$

Tal condição é verdadeira, seja qual for o valor que a variável assuma nesse domínio. Assim, no domínio dos inteiros positivos, verifica-se (é verdadeira) a equivalência $x>0 \Leftrightarrow \forall_x x>0$. Mas

$$x>0 \Leftrightarrow \forall_x x>0$$

já não é verdadeira se considerarmos o domínio dos inteiros, pois se substituirmos aí (todas as ocorrências livres de) x por, por exemplo, 5, obtemos uma proposição que é falsa ($5>0 \Leftrightarrow \forall_x x>0$). Continuamos, contudo, a poder dizer que a condição x>0 é verdadeira sse o seu fecho universal $\forall_x x>0$ o for (pois nem x>0 nem $\forall_x x>0$ são verdadeiras no domínio dos inteiros).

Terminologia (fórmulas e fórmulas fechadas):

É usual (nomeadamente em lógica) designar as expressões proposicionais e as proposições genericamente por *fórmulas*, designando-se então as fórmulas sem variáveis livres por *fórmulas fechadas*.

∇

O fecho universal de uma condição é um exemplo de uma fórmula fechada; as fórmulas sem variáveis são outro exemplo.

As fórmulas fechadas (traduzem proposições e portanto) são verdadeiras ou falsas !

Algumas implicações e equivalências úteis

Para terminar este capítulo, iremos listar algumas implicações e equivalências úteis, envolvendo quantificadores.

Notação:

Ao longo deste capítulo, temos estado a usar P, P1, ... para nos referir genericamente a proposições, e P(...), P1(...), ... para nos referirmos genericamente a expressões proposicionais (condições) cujas variáveis livres estão entre as variáveis indicadas entre parênteses.

Ora, muitas vezes queremos referir-nos genericamente a expressões, que tanto podem ser proposições, como condições (expressões que, de acordo com a terminologia anterior, podemos designar simplesmente de fórmulas). Assim, no que se segue, iremos usar φ, ψ, $\varphi 1$, $\varphi 2$, ... para nos referirmos genericamente a fórmulas, sejam elas fórmulas fechadas (i.e. proposições) ou fórmulas com variáveis livres (i.e. condições).

Usaremos ainda a notação φ^x_t para designar a fórmula que se obtém de φ quando se substitui (todas) as ocorrências livres de x por t (só as ocorrências livres de x são substituídas por t): se φ for uma condição da forma P(x,...), então φ^x_t = P(t,...); se φ for uma fórmula onde x não ocorre livre, então $\varphi^x_t = \varphi$; e, naturalmente, $\varphi^x_x = \varphi$.

∇

Comecemos por recordar algumas implicações e equivalências que já referimos ao longo desta secção, reescrevendo-as à luz desta nova notação (e considerando agora quaisquer fórmulas, em vez de apenas condições envolvendo as variáveis em causa):

- Segundas leis de De Morgan:

(qualquer que seja a fórmula φ, tem-se)

$$\neg\forall_x \varphi \Leftrightarrow \exists_x \neg\varphi$$

$$\neg\exists_x \varphi \Leftrightarrow \forall_x \neg\varphi$$

- Trocas de quantificadores:

(qualquer que seja a fórmula φ, tem-se)

$\forall_x\forall_y\, \varphi \;\Leftrightarrow\; \forall_y\forall_x\, \varphi$

$\exists_x\exists_y\, \varphi \;\Leftrightarrow\; \exists_y\exists_x\, \varphi$

$\exists_x\forall_y\, \varphi \Rightarrow \forall_y\exists_x\, \varphi$

- "Instanciação" de x (eliminação do quantificador universal):

(qualquer que seja a fórmula φ, tem-se)

$\forall_x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x{}_t$, se t está livre para x em φ

Caso particular: se *a* for uma designação apropriada de um elemento do domínio em causa (uma constante, ou um qualquer termo sem variáveis que o designe), então *a* está livre para (qualquer variável) x em (qualquer fórmula) φ, pelo que se tem sempre:

$\forall_x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x{}_a$

Outro caso particular: como qualquer variável está livre para si própria em qualquer fórmula, e como $\varphi^x{}_x = \varphi$, tem-se também que:

$\forall_x\, \varphi \Rightarrow \varphi$

Repare-se que das implicações anteriores saem facilmente as implicações seguintes[50], que nos indicam condições em que podemos introduzir um quantificador existencial:

- Introdução do quantificador existencial:

(qualquer que seja a fórmula φ, tem-se)

$\varphi^x{}_t \Rightarrow\; \exists_x\varphi$, se t está livre para x em φ

$\varphi^x{}_a \Rightarrow \exists_x\varphi$

$\varphi \Rightarrow \exists_x\varphi$

- E, embora não o tenhamos referido, é imediato que também se tem a seguinte relação entre os dois tipos de quantificadores:

(qualquer que seja a fórmula φ, tem-se[51])

$\forall_x\, \varphi \Rightarrow \exists_x\varphi$

<u>mas</u> o recíproco não se verifica em geral.

- Por outro lado, se x não ocorrer livre numa fórmula φ, então quantificações sobre x desta fórmula "não têm qualquer efeito", o que se traduz pelas equivalências:

---

50 A título exemplificativo, ilustremos como se pode deduzir que "para qualquer fórmula φ, se tem $\varphi^x{}_a \Rightarrow \exists_x\, \varphi$", a partir do conhecimento de que (*) "se tem $\forall_x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x{}_a$, qualquer que seja a fórmula φ":

Seja φ uma qualquer fórmula e seja $\psi = \neg\varphi$. Por (*), tem-se $\forall_x\, \psi \Rightarrow \psi^x{}_a$, isto é, $\forall_x\, \neg\varphi \Rightarrow (\neg\varphi)^x{}_a$, fórmula que pode ser reescrita como se segue: $\forall_x \neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi^x{}_a$. Mas então (contra-recíproco) também se tem $\neg\neg\varphi^x{}_a \Rightarrow \neg\forall_x\neg\varphi$, donde sai facilmente (pois $\neg\neg\varphi^x{}_a$ é equivalente a $\varphi^x{}_a$, e $\forall_x$ e $\exists_x$ são duais) que $\varphi^x{}_a \Rightarrow \exists_x\, \varphi$ (como se pretendia demonstrar).

51 A veracidade da implicação a seguir decorre de se assumir que os domínios das variáveis nunca são vazios.

(qualquer que seja a fórmula φ, tem-se)

$\forall_x \varphi \Leftrightarrow \varphi$, se x não ocorre livre em φ

$\exists_x \varphi \Leftrightarrow \varphi$, se x não ocorre livre em φ

Um outro aspecto que ainda não abordámos, e que é importante, respeita ao *modo como os quantificadores interagem com os conectivos lógicos*.

As implicações e equivalências a seguir respeitam à interacção dos quantificadores com a conjunção, a disjunção e a implicação (verificando-se, nomeadamente, que o quantificador universal se "distribui livremente" pela conjunção e que o mesmo se verifica com o quantificador existencial em relação à disjunção):

(quaisquer que sejam as fórmulas $\varphi1$ e $\varphi2$, tem-se)

i) $\forall_x (\varphi1 \wedge \varphi2) \Leftrightarrow \forall_x \varphi1 \wedge \forall_x \varphi2$

ii) $\exists_x (\varphi1 \wedge \varphi2) \Rightarrow \exists_x \varphi1 \wedge \exists_x \varphi2$

iii) $\forall_x \varphi1 \vee \forall_x \varphi2 \Rightarrow \forall_x (\varphi1 \vee \varphi2)$

iv) $\exists_x (\varphi1 \vee \varphi2) \Leftrightarrow \exists_x \varphi1 \vee \exists_x \varphi2$

v) $\forall_x (\varphi1 \Rightarrow \varphi2) \Rightarrow (\forall_x \varphi1 \Rightarrow \forall_x \varphi2)$

vi) $(\exists_x \varphi1 \Rightarrow \exists_x \varphi2) \Rightarrow \exists_x(\varphi1 \Rightarrow \varphi2)$

A veracidade destas (e doutras) implicações e equivalências será provada na disciplina de Lógica. Aqui pretende-se essencialmente que os alunos conheçam as mais importantes e que sejam capazes de confirmar intuitivamente a sua veracidade, através da "leitura do seu significado" (umas são mais ou menos relativamente óbvias, ao passo que outras exigem uma análise um pouco mais cuidada).

A título exemplificativo, mostraremos em seguida como se pode demonstrar[52] a veracidade da implicação iii), o que servirá, também, para ilustrar como se mostra usualmente que uma quantificação universal é verdadeira.

<u>Exemplo 3</u> (veracidade da implicação iii)):

Sejam $\varphi1$ e $\varphi2$ duas quaisquer fórmulas. Pretende-se mostrar que $\forall_x\varphi1 \vee \forall_x\varphi2 \Rightarrow \forall_x(\varphi1 \vee \varphi2)$ é verdadeira. Ora, como decorre da tautologia xxiii) do exercício 4 da secção 1, para demonstrar que uma disjunção implica uma certa fórmula, basta-nos demonstrar que cada um dos membros da disjunção implica essa fórmula (dito de outra forma, e usando a terminlogia atrás referida, podemos efecuar "uma demonstração por casos" e concluir que o consequente se verifica em qualquer um dos casos).

Isto é, no exemplo presente, basta-nos demonstrar que (são verdadeiras as implicações):

a) $\forall_x \varphi1 \Rightarrow \forall_x (\varphi1 \vee \varphi2)$ e

b) $\forall_x \varphi2 \Rightarrow \forall_x (\varphi1 \vee \varphi2)$

Demonstremos a seguir a), uma vez que a prova de b) é análoga.

∇

[52] A formalização rigorosa deste tipo de prova será estudada na disciplina de Lógica.

Exemplo 4 (veracidade da implicação $\forall_x \varphi 1 \Rightarrow \forall_x (\varphi 1 \vee \varphi 2)$, para quaisquer fórmulas $\varphi 1$ e $\varphi 2$):

Comecemos por demonstrar que $\forall_x \varphi 1 \Rightarrow \forall_x (\varphi 1 \vee \varphi 2)$, para duas fórmulas $\varphi 1$ e $\varphi 2$ concretas (tal demonstração não é obviamente necessária, uma vez demonstrado o resultado para quaisquer fórmulas $\varphi 1$ e $\varphi 2$, mas a demonstração de um caso particular ajudará a perceber melhor a demonstração mais abstracta, que faremos depois, do caso geral).

a) Demonstremos (por exemplo) que $\forall_x\, x>1 \Rightarrow \forall_x (x>1 \vee x=-7)$

Efectuemos a demonstração seguindo um estilo matemático informal, típico.

Considere-se que o domínio das variáveis é um qualquer domínio onde façam sentido as condições em causa.

- Assuma-se, como hipótese, que se tem (1): $\forall_x\, x>1$
  e mostre-se que então também se tem $\forall_x (x>1 \vee x=-7)$
- Sendo *a* um qualquer elemento do domínio, pretende-se então provar que (debaixo da hipótese mencionada) se verifica $a>1 \vee a=-7$.
- Ora, por (1), todo o elemento do domínio é maior que 1. Logo (2): $a>1$
- Mas (3): $a>1 \Rightarrow (a>1 \vee a=-7)$
  (não só é uma implicação verdadeira, como se trata mesmo de uma tautologia)
- Logo, de (2) e (3), conclui-se que $a>1 \vee a=-7$ (c.q.d.)

b) Demonstremos agora o caso geral.

Sejam $\varphi 1$ e $\varphi 2$ duas quaisquer fórmulas. Quer-se provar que $\forall_x \varphi 1 \Rightarrow \forall_x (\varphi 1 \vee \varphi 2)$

b-i) Para mostrar que se verifica uma implicação, pode assumir-se o antecedente, e procurar deduzir o consequente.

b-ii) Assuma-se, então, que se tem (1): $\forall_x \varphi 1$, e procure-se mostrar que se tem $\forall_x (\varphi 1 \vee \varphi 2)$.

b-iii Informalmente, temos então de demonstrar que que se verifica a disjunção $\varphi 1 \vee \varphi 2$, qualquer que seja o valor do domínio que x denote. Dito de outra forma, e supondo que *a* é uma designação de um objecto (qualquer) do domínio, temos de verificar que é verdadeira a disjunção $\varphi 1 \vee \varphi 2$, quando se substituí aí (as ocorrências livres de) x por *a*, ou seja (usando a notação atrás introduzida), temos de verificar que se tem $(\varphi 1 \vee \varphi 2)^x_a$, fórmula que é obviamente idêntica a $\varphi 1^x_a \vee \varphi 2^x_a$.

- Mas, por (1) (como *a* é uma designação de um objecto do domínio), verifica-se[53], em particular, $\varphi 1^x_a$
- Logo, como $\varphi 1^x_a \Rightarrow \varphi 1^x_a \vee \varphi 2^x_a$ (é uma tautologia), conclui-se (por *Modus Ponens*) que se tem $\varphi 1^x_a \vee \varphi 2^x_a$ (c.q.d.)

Observe-se que o passo iii) pode ser (e é, em geral) "simplificado", uma vez que a própria variável x pode desempenhar o papel de *a* (conduzindo a uma notação menos pesada), desde que ao longo da demonstração não se tenha já atribuído a x um qualquer valor concreto (ou assumido que x satisfaz alguma condição específica).

---

[53] Mais formalmente, como estamos a assumir, por (1), que $\forall_x \varphi 1$ é verdadeira, e como afirmámos atrás que qualquer fórmula da forma $\forall_x \varphi 1 \Rightarrow \varphi 1^x_a$ também é verdadeira, podemos concluir, por *Modus Ponens*, que $\varphi 1^x_a$ é verdadeira.

b-iii), reformulado:

Queremos provar que é verdadeira a fórmula $\forall_x\ (\varphi 1 \vee \varphi 2)$.

Ora, como referimos atrás, tal verifica-se sse for verdadeira a fórmula $\varphi 1 \vee \varphi 2$ (fórmula onde ocorrerá normalmente, mas não obrigatoriamente, a variável x livre). Provemos então que se tem $\varphi 1 \vee \varphi 2$:

- Por (1) [54], tem-se, em particular, $\varphi 1$
- Logo, como $\varphi 1 \Rightarrow \varphi 1 \vee \varphi 2$, conclui-se (por *Modus Ponens*) que se tem $\varphi 1 \vee \varphi 2$ (c.q.d.)

Provámos, assim, que se verifica $\forall_x\ \varphi 1 \Rightarrow \forall_x\ (\varphi 1 \vee \varphi 2)$, para quaisquer fórmulas $\varphi 1$ e $\varphi 2$.

∇

Por outro lado, é de referir que o recíproco das implicações ii), iii), v) e vi) nem sempre se verifica. Para o mostrar basta dar um "contra-exemplo".

Considere-se, por exemplo, o contra-recíproco de ii): $\exists_x\ \varphi 1 \wedge \exists_x\ \varphi 2 \Rightarrow \exists_x\ (\varphi 1 \wedge \varphi 2)$. Para mostrar que ele nem sempre se verifica, basta-nos encontrar fórmulas $\varphi 1$ e $\varphi 2$ para as quais não se tenha (não seja verdadeira) tal implicação $\exists_x\ \varphi 1 \wedge \exists_x\ \varphi 2 \Rightarrow \exists_x\ (\varphi 1 \wedge \varphi 2)$. Ora, é imediato que não se tem a implicação

$$\exists_x\ x<1 \wedge \exists_x\ x>1 \Rightarrow \exists_x\ (x<1 \wedge x>1)$$

(assumindo por exemplo que x é uma variável real).

Nas fórmulas i) a vi) referimos as interacções com a conjunção, a disjunção e a implicação de cada um dos dois tipos de quantificadores, isoladamente. As implicações a seguir traduzem outras interacções com esses conectivos quando se consideram simultaneamente os dois tipos de quantificadores:

(quaisquer que sejam as fórmulas $\varphi 1$ e $\varphi 2$, tem-se)

vii) $\forall_x\ (\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2) \Rightarrow (\exists_x\ \varphi 1 \Rightarrow \exists_x\ \varphi 2)$

viii) $\forall_x\ \varphi 1 \wedge \exists_x\ \varphi 2 \Rightarrow \exists_x\ (\varphi 1 \wedge \varphi 2)$

ix) $\forall_x\ \varphi 1 \vee \exists_x\ \varphi 2 \Rightarrow \exists_x\ (\varphi 1 \vee \varphi 2)$

x) $\forall_x\ (\varphi 1 \vee \varphi 2) \Rightarrow \forall_x\ \varphi 1 \vee \exists_x\ \varphi 2$

xi) $(\exists_x\ \varphi 1 \Rightarrow \forall_x\ \varphi 2) \Rightarrow \forall_x(\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2)$

xii) $(\forall_x\ \varphi 1 \Rightarrow \forall_x\ \varphi 2) \Rightarrow \exists_x(\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2)$

Vejamos, como mais uma ilustração, como se poderia demonstrar a veracidade da implicação vii) (que envolve agora a demonstração da veracidade de uma quantificação existencial).

<u>Exemplo 5</u> (veracidade da implicação vii)):

Sejam $\varphi 1$ e $\varphi 2$ quaisquer fórmulas. Pretende-se mostrar que $\forall_x\ (\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2) \Rightarrow (\exists_x \varphi 1 \Rightarrow \exists_x \varphi 2)$ é verdadeira.

- Para mostrar que se verifica uma implicação, pode assumir-se o antecedente, e procurar deduzir o consequente.
- Assuma-se, então, que se tem (1) $\forall_x\ (\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2)$ e procure-se mostrar que se tem (2) $(\exists_x\ \varphi 1 \Rightarrow \exists_x\ \varphi 2)$.

---

[54] Mais formalmente, como estamos a assumir, por (1), que $\forall_x\ \varphi 1$ é verdadeira, e como afirmámos atrás que qualquer fórmula da forma $\forall_x\ \varphi 1 \Rightarrow \varphi 1$ também é verdadeira, podemos concluir, por *Modus Ponens*, que $\varphi 1$ é verdadeira.

- Para isso, de modo análogo, pode assumir-se que se verifica (3) $\exists_x\varphi1$ e tentar mostrar que se tem $\exists_x\varphi2$ (isto é, informalmente, temos de mostrar que se tem $\varphi2$ para algum valor de x)
- Ora, por (3), existe algum objecto do domínio de x que verifica $\varphi1$; ou seja, mais precisamente, sendo *a* uma designação desse objecto, verifica-se (4) $\varphi^x{}_a$.
- Mas, por (1), verifica-se ($\varphi1\Rightarrow\varphi2$) quando "x é substituído por qualquer valor do domínio", e portanto, em particular, verifica-se ($\varphi1\Rightarrow\varphi2$) quando "x é substituído por esse valor *a*", isto é, mais precisamente, verifica-se[55] $(\varphi1\Rightarrow\varphi2)^x{}_a$, fórmula idêntica a (5) $\varphi1^x{}_a\Rightarrow \varphi2^x{}_a$
- Mas, de (4) e (5), sai (por *Modus Ponens*) que se tem $\varphi2^x{}_a$ e portanto[56] $\exists_x\varphi$ (c.q.d.)

Façamos agora a mesma demonstração, mas para duas fórmulas $\varphi1$ e $\varphi2$ concretas (esta demonstração não é obviamente necessária, pois já vimos que se tem $\forall_x(\varphi1\Rightarrow\varphi2)\Rightarrow(\exists_x\varphi1\Rightarrow\exists_x\varphi2)$, para quaisquer fórmulas $\varphi1$ e $\varphi2$, mas tal "instanciação da demonstração genérica" poderá ajudar a percebê-la melhor).

Demonstremos (por exemplo) que $\forall_x (x>1 \Rightarrow x>-7) \Rightarrow (\exists_x x>1 \Rightarrow \exists_x x>-7)$:

- Assuma-se que (1) $\forall_x (x>1 \Rightarrow x>-7)$ e procure-se mostrar que (2) $(\exists_x x>1 \Rightarrow \exists_x x>-7)$.
- Para isso, de modo análogo, pode assumir-se que (3) $\exists_x x>1$ e tentar mostrar que $\exists_x x>-7$
- Ora, por (3), existe algum objecto do domínio que é maior que um[57]. Seja *a* uma designação desse objecto. Tem-se então (4) $a > 1$.
- Mas, por (1), tem-se[58] que (5) $a>1 \Rightarrow a>-7$
- E, de (4) e (5), sai (por *Modus Ponens*) que $a>-7$. Logo[59] $\exists_x x>-7$ (c.q.d.)

∇

A título ilustrativo, seguem-se mais algumas equivalências que se verificam, quando se assume que a variável em causa não ocorre livre nalguma das suas fórmulas:

(quaisquer que sejam as fórmulas $\varphi1$ e $\varphi2$, tem-se)

xiii)	$\forall_x (\varphi1 \Rightarrow \varphi2) \Leftrightarrow (\exists_x \varphi1 \Rightarrow \varphi2)$	,	desde que x não ocorra livre em $\varphi2$
xiv)	$\exists_x (\varphi1 \Rightarrow \varphi2) \Leftrightarrow (\varphi1 \Rightarrow \exists_x \varphi2)$	,	desde que x não ocorra livre em $\varphi1$
xv)	$\forall_x (\varphi1 \Rightarrow \varphi2) \Leftrightarrow (\varphi1 \Rightarrow \forall_x \varphi2)$	,	desde que x não ocorra livre em $\varphi1$
xvi)	$\exists_x (\varphi1 \Rightarrow \varphi2) \Leftrightarrow (\forall_x\varphi1 \Rightarrow \varphi2)$	,	desde que x não ocorra livre em $\varphi2$
xvii)	$\exists_x (\varphi1 \wedge \varphi2) \Leftrightarrow (\varphi1 \wedge \exists_x \varphi2)$	,	desde que x não ocorra livre em $\varphi1$
xviii)	$\forall_x (\varphi1 \vee \varphi2) \Leftrightarrow (\varphi1 \vee \forall_x \varphi2)$	,	desde que x não ocorra livre em $\varphi1$
xix)	$\forall_x (\varphi1 \vee \varphi2) \Leftrightarrow (\varphi1 \vee \forall_x \varphi2)$	,	desde que x não ocorra livre em $\varphi1$

---

[55] Mais formalmente: de (1) e de $\forall_x (\varphi1\Rightarrow\varphi2) \Rightarrow (\varphi1\Rightarrow\varphi2)^x{}_a$, sai, por *Modus Ponens*, $(\varphi1\Rightarrow\varphi2)^x{}_a$.

[56] Formalmente: como já observámos atrás, $\varphi^x{}_a \Rightarrow \exists_x\varphi$, pelo que basta usar o *Modus Ponens*, para concluir $\exists_x\varphi$ de $\varphi^x{}_a$.

[57] Estamos nauralmente a assumir que estamos a trabalhar com um domínio, como por exemplo o dos inteiros, onde faz sentido falar de uma tal comparação.

[58] Mais formalmente: de (1) e de $\forall_x (x>1 \Rightarrow x>-7) \Rightarrow (a>1 \Rightarrow a>-7)$, sai, por *Modus Ponens*, $(a>1 \Rightarrow a>-7)$.

[59] Formalmente: como $a>-7 \Rightarrow \exists_x x>-7$, de $a>-7$ conclui-se, por *Modus Ponens*, que $\exists_x x>-7$.

Saliente-se que as equivalências anteriores deduzem-se, com relativa facilidade, usando, nomeadamente:

- algumas das fórmulas i) a xii);
- o resultado da substituição de equivalentes (enunciado na secção 2, anterior);
- e as seguintes equivalências (já referidas): se x não ocorre livre em φ, então $\forall_x\varphi \Leftrightarrow \varphi$ e $\exists_x\varphi \Leftrightarrow \varphi$.

Ilustremos o que se acabou de afirmar, demonstrando p.ex. xvii).

Exemplo 6 (veracidade da implicação xvii)):

Sejam $\varphi1$ e $\varphi2$ quaisquer fórmulas, e suponha-se que x não ocorre livre em $\varphi1$.

Pretende-se mostrar que então $\exists_x (\varphi1 \wedge \varphi2) \Leftrightarrow (\varphi1 \wedge \exists_x \varphi2)$.

Sinteticamente:

1• $\exists_x (\varphi1 \wedge \varphi2) \Rightarrow (\exists_x \varphi1 \wedge \exists_x \varphi2)$

(Justificação: veracidade da fórmula ii) atrás)

2• $\exists_x\varphi1 \Leftrightarrow \varphi1$

(Justificação: x não ocorre livre em $\varphi1$)

3• $\exists_x (\varphi1 \wedge \varphi2) \Rightarrow (\varphi1 \wedge \exists_x \varphi2)$

(Justificação: por 2, podemos efectuar a substituição dos equivalentes: substituir, em 1, $\exists_x\varphi1$ por $\varphi1$)

4• $(\forall_x \varphi1 \wedge \exists_x \varphi2) \Rightarrow \exists_x (\varphi1 \wedge \varphi2)$

(Justificação: viii))

5• $\forall_x\varphi1 \Leftrightarrow \varphi1$

(Justificação: x não ocorre livre em $\varphi1$)

6• $(\varphi1 \wedge \exists_x \varphi2) \Rightarrow \exists_x (\varphi1 \wedge \varphi2)$

(Justificação: por 5, podemos efectuar a substituição dos equivalentes: substituir, em 4, $\forall_x\varphi1$ por $\varphi1$)

7• $\exists_x (\varphi1 \wedge \varphi2) \Leftrightarrow (\varphi1 \wedge \exists_x \varphi2)$

(Justificação: sai *tautologicamente* de 3 e 6, isto é, pode obter-se de 3 e 6 usando p.ex. tautologias apropriadas e *Modus Ponens*)

∇

Exercícios:

1. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas, supondo que as variáveis intervenientes têm por domínio o conjunto dos reais:
   a) $\forall_x\ x^2+1>1$
   b) $\forall_x\ (x>2 \Rightarrow x>1)$
   c) $\forall_x\exists_y\ x^2=y$, $\exists_y\forall_x\ x^2=y$
   d) $\forall_{x,y}\ \exists_z\ x=yz$
   e) $\exists_{x,y}\ (x-y)^2=x^2-y^2$
   f) $\forall_{x,y}\ (x-y)^2=x^2-y^2$
2. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas, supondo que as variáveis intervenientes têm por domínio o conjunto dos inteiros positivos:
   a) $\forall_x\ x^2+1>1$
   b) $\forall_x\ (x>2 \Rightarrow x>1)$

c) $\forall_x \exists_y\ x^2=y$, $\exists_y \forall_x\ x^2=y$

d) $\forall_{x,y}\ \exists_z\ x=yz$

e) $\exists_{x,y}\ (x-y)^2=x^2-y^2$

f) $\forall_{x,y}\ (x-y)^2=x^2-y^2$

3. Escreva a negação de cada uma das condições seguintes (obtendo uma expressão equivalente onde não ocorra qualquer negação):

a) $x > z \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

b) $|f(x)| < \varepsilon \Rightarrow x > z$

c) $\forall_x\ y = x^2$

d) $\exists_y\ y = x^2$

e) $\forall_x \forall_y\ z\text{-}x = x\text{-}y$

f) $\exists_x \forall_y\ z\text{-}x = x\text{-}y$

g) $\exists_x \exists_y\ z\text{-}x = x\text{-}y$

h) $\forall_y \exists_z \forall_x\ (x > z \Rightarrow f(x) > y)$

i) $\forall_y \exists_z \forall_x\ (x < z \Rightarrow |f(x)| > y)$

4. Como é sabido, sendo u_n o termo geral de uma sucessão de termos reais e *a* um número real, a proposição $\lim u_n = a$ é equivalente a:

$$\forall_\delta\ \exists_p \forall_n\ (n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta)$$

(onde p e n têm por domínio o conjunto dos inteiros positivos e δ o conjunto dos reais positivos). Tendo em conta este facto traduza simbolicamente a proposição $\neg(\lim u_n = a)$.

5. Sabendo que a sucessão (de termo geral) u_n é *limitada* sse

$$\exists_k \forall_n\ |u_n| < k$$

a) Defina a noção de sucessão ilimitada (i.e. não limitada).

b) Diga, justificando, se uma sucessão limitada verifica a condição $\forall_n\ \exists_k |u_n| < k$.

b) Mostre que nem toda a sucessão que verifica a condição $\forall_n\ \exists_k |u_n| < k$ é limitada.

6. Diga quais são as ocorrências de cada uma das variáveis que estão livres em:

a) $\exists_x \exists_y\ z\text{-}x = x\text{-}y$

b) $\forall_y \exists_z \forall_x\ (x > z \Rightarrow f(x) > y)$

c) $\forall_y \exists_z \forall_x\ (x < z \Rightarrow |f(x)| > y)$

d) $\exists_z \forall_x\ (x < z \Rightarrow |f(x)| > y)\ \vee\ \exists_y \exists_x\ (x > z \Rightarrow f(x) > y)$

e) $\forall_x\ (x < z \vee \exists_x \exists_z\ z\text{-}x = x+z\ )$

7. Suponha que P(z) é a condição $\forall_x\ (x < z \vee \exists_y \exists_z\ z\text{-}y = y+z\ )$.

a) Diga a que é igual P(5).

b) Diga quais dos seguintes termos estão livres para z em P(z): x+2 , y , z , k , y-2 , 7

8. Demonstre que é verdadeira a equivalência:

$$\neg\forall_x\ (\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2) \Leftrightarrow \exists_x\ (\varphi 1 \wedge \neg\varphi 2)$$

(i.e., demonstre que é verdadeira a equivalência anterior, quaisquer que sejam as fórmulas φ1 e φ2).

9. Demonstre que é verdadeira a equivalência:

$$\neg\exists_x\ (\varphi 1 \wedge \varphi 2) \Leftrightarrow \forall_x\ (\varphi 1 \Rightarrow \neg\varphi 2)$$

10. Mostre que nem sempre se verifica o recíproco de:

$$\forall_x \varphi 1 \vee \forall_x \varphi 2 \Rightarrow \forall_x (\varphi 1 \vee \varphi 2)$$

(i.e., mostre que existem fórmulas φ1 e φ2, para as quais não é verdadeiro o recíproco da implicação anterior: $\forall_x (\varphi 1 \vee \varphi 2) \Rightarrow \forall_x \varphi 1 \vee \forall_x \varphi 2$).

11. Demonstre que é verdadeira a implicação:

$$\forall_x (\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2) \Rightarrow (\forall_x \varphi 1 \Rightarrow \forall_x \varphi 2)$$

12. Mostre que nem sempre se verifica o recíproco de:

$$\forall_x (\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2) \Rightarrow (\forall_x \varphi 1 \Rightarrow \forall_x \varphi 2)$$

13. Mostre que nem sempre se verifica o recíproco de:

$$(\exists_x \varphi 1 \Rightarrow \exists_x \varphi 2) \Rightarrow \exists_x(\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2)$$

14. Demonstre que é verdadeira a implicação:

$$\forall_x \varphi 1 \wedge \exists_x \varphi 2 \Rightarrow \exists_x (\varphi 1 \wedge \varphi 2)$$

15. Demonstre que é verdadeira a implicação:

$$\forall_x \varphi 1 \vee \exists_x \varphi 2 \Rightarrow \exists_x (\varphi 1 \vee \varphi 2)$$

16. Demonstre que é verdadeira a implicação:

$$\forall_x (\varphi 1 \vee \varphi 2) \Rightarrow \forall_x \varphi 1 \vee \exists_x \varphi 2$$

17. Mostre que nem sempre se verifica o recíproco de:

$$\forall_x (\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2) \Rightarrow (\exists_x \varphi 1 \Rightarrow \exists_x \varphi 2)$$

18. Mostre que nem sempre se verifica o recíproco de:

$$\forall_x \varphi 1 \wedge \exists_x \varphi 2 \Rightarrow \exists_x (\varphi 1 \wedge \varphi 2)$$

19. Demonstre que são verdadeiras as fórmulas xiii) a xix).

20. Mostre que se x ocorrer livre em φ2, então nem sempre se verifica:

$$\forall_x (\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2) \Leftrightarrow (\exists_x \varphi 1 \Rightarrow \varphi 2)$$

21. Mostre que se x ocorrer livre em φ1, então nem sempre se verifica:

$$\forall_x (\varphi 1 \Rightarrow \varphi 2) \Leftrightarrow (\varphi 1 \Rightarrow \forall_x \varphi 2)$$

22. Mostre que se x ocorrer livre em φ1, então nem sempre se verifica:

$$\exists_x (\varphi 1 \wedge \varphi 2) \Leftrightarrow (\varphi 1 \wedge \exists_x \varphi 2)$$

∇