Capítulo 9 - Relações de recorrência

No capítulo anterior abordámos a importante técnica da definição de funções por recursão e demonstrámos um conjunto de resultados que nos garantem que tal definição não é problemática, desde que "siga um certo padrão" (desde que satisfaça um certo conjunto de requisitos). Neste capítulo concentrar-nos-emos no caso particular da definição de sucessões por recursão, ou recorrência. Mostraremos como tais definições ocorrem naturalmente em problemas de diversos tipos (desde problemas ligados ao crescimento de populações a problemas de índole geométrico) e analisaremos como obter, em certos casos, uma definição explícita do termo geral de tais sucessões, definidas por recorrência.

Um domínio importante de aplicação dos resultados deste capítulo tem a ver com à análise da eficiência de algoritmos. No entanto, exemplos dessa área não serão incluídos neste capítulo, sendo deixados para o último capítulo, onde se efectua uma introdução à análise de eficiência de algoritmos. A importância e interesse desse tópico, nomeadamente para os alunos de Informática, justifica que se lhe dedique um capítulo autónomo neste texto.

Secção 1: Caracterização da definição por recorrência de sucessões (revisão).

Neste capítulo iremos abordar a problemática da definição por recursão, ou recorrência, de sucessões e introduzir algumas técnicas para a "descoberta de expressões explícitas" para o termo geral de sucessões definidas desse modo.

Nesta secção começaremos por rever em que consiste a definição por recursão, ou por recorrência, de[1] sucessões$_q$ de elementos de um conjunto V (onde se assume que q é um inteiro), isto é, de famílias (aplicações) u: $\mathcal{Z}_q \rightarrow V$ (com $\mathcal{Z}_q = \{q, q+1, q+2, q+3, ...\}$). Embora os casos mais importantes, e que nos vão aparecer nos exemplos, sejam as sucessões$_1$ (i.e. as aplicações u: $\mathbb{N}_1 \rightarrow V$) e as sucessões$_0$ (i.e. as aplicações u: $\mathbb{N}_0 \rightarrow V$), não há razão para não considerarmos, à partida, a definição para o caso geral.

A *definição por recorrência de uma sucessão*$_q$ u (de elementos de V) consiste tipicamente no seguinte:

- *Equação de recorrência*:

  Definição da equação que indica como calcular o valor de qualquer termo u_n à custa de i (≥ 1) termos anteriores da sucessão. Nessa definição pode ainda referir-se o índice n.

  Mais formalmente, a equação de recorrência toma a forma:

  $$u_n = F(n, u_{n-i}, ..., u_{n-1}), \text{ para qualquer inteiro } n \geq q+i$$

  com F uma aplicação F: $\mathcal{Z}_q \times V^i \rightarrow V$.

- *Condições iniciais*:

  Define-se explicitamente qual o valor dos primeiros i termos da sucessão u.

  A chamada *base* da definição recursiva, ou *condição inicial* (*condições iniciais*, se i>1).

[1] Ou q-sucessões (recordar a terminologia introduzida na secção 4 do capítulo 4).

A este par de componentes da definição por recorrência - condições iniciais e equação de recorrência - também se chama uma *relação de recorrência* (embora por vezes também se use o termo relação de recorrência para se referir apenas à equação de recorrência).

No caso mais simples, de relações de recorrência, o termo u_n é definido à custa do termo u_{n-1}, e as condições iniciais resumem-se em indicar qual o valor do primeiro termo da sucessão$_q$ u.

No capítulo anterior mostrámos que a definição de uma sucessão$_q$ u de acordo com o padrão anterior não era problemática, no sentido de que existia uma e uma só aplicação u: $\mathcal{Z}_q \rightarrow V$ que satisfazia uma tal relação de recorrência (veja-se a secção 1 do capítulo anterior, para o caso mais simples em que u_n é definido à custa de u_{n-1}, e o corolário 4 da última secção desse mesmo capítulo para o caso geral).

Mas o facto de sabermos que existe uma e uma só sucessão$_q$ que satisfaz uma relação de recorrência, do tipo indicado acima, embora seja fundamental, não nos deve satisfazer. É muito importante dispormos também de formas explícitas que nos permitam calcular directamente o valor de qualquer termo u_n (como função de n). Caso contrário, o cálculo do valor de um termo u_n pode-se tornar extremamente ineficiente[2].

Considere-se p.ex. a seguinte definição por recorrência de uma sucessão$_0$ de naturais u:$\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$:

i) $u_0 = 0$

ii) $u_n = 2\, u_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$ (qualquer)

O cálculo do valor de u_{500}, por aplicação desta definição recursiva, obriga-nos a calcular sucessivamente u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, ..., u_{499}.

Torna-se assim extremamente importante, do ponto de vista prático, procurar obter "soluções explícitas" para estas relações de recorrência (o que, embora nem sempre seja possível, em muitos casos é). A tal dedicaremos este capítulo.

A relevância deste tópico advém do facto de a solução mais simples para muitos problemas (de certa natureza) assentar precisamente numa definição por recorrência (como procuraremos dar exemplos).

Secção 2: Algumas estratégias para a solução de relações de recorrência.

Consideremos como primeiro exemplo (motivador) o bem conhecido problema das "Torres de Hanoi".

<u>Exemplo (motivador) 1</u> (Torres de Hanoi):

Esistem três postes verticais num mosteiro, num dos quais estão enfiados 64 discos, por ordem estritamente crescente de tamanho. Os monges pretendem transferir os discos do poste inicial para para um dos outros postes, usando o terceiro poste como auxiliar e nunca violando a seguinte restrição:

---

[2] Refira-se, a propósito, que embora uma função *u*, definida por uma equação de recorrência do tipo: $u_n = F(n, u_{n-i}, ..., u_{n-1})$, seja muito facilmente programável num computador (assumindo que a função F o é), recorrendo a um programa de tipo recursivo, tal tipo de programa pode ser altamente ineficiente, como ilustraremos à frente (no último capítulo). É em geral preferível, em termos de eficiência, efectuar o cálculo de um termo u_n por processos iterativos (recorrendo, por exemplo, a ciclos tipo "While"), do que por processos recursivos. Naturalmente, a situação ideal é quando podemos efectuar o cálculo de u_n directamente, por u_n poder ser traduzido através de uma função de n expressa em termos de operações básicas, já disponíveis na linguagem de programação em causa.

"Um disco maior nunca pode ser colocado em cima de um disco mais pequeno"

Os discos acreditam que quando tiverem terminado esta tarefa a humanidade terá ganho o acesso ao céu e o mundo acabará ...

∇

Na disciplina (anterior) de Paradigmas da Programação, os alunos aprenderam a construir um programa para realizar esta tarefa (em realidade virtual).

Mas será que os monges têm alguma razão ? Será que tal problema é mesmo "solúvel" (do ponto de vista prático) ?

Quanto tempo demoraria a efectuar a tarefa que os monges pretendiam fazer (supondo que os monges sabiam como executar tal tarefa) ?

Para obter esse tempo, podemos tentar determinar quanto movimentos de um disco, de um poste para outro, temos de fazer, no mínimo, e depois assumir que cada movimento de um disco demora (em média) um certo tempo, e fazer as contas.

Estratégia para a formalização/solução do problema[3]:

Primeiro passo: generalizar o problema.

Tal como fizemos na disciplina de Paradigmas da Programação, aquando da construção do programa para a resolução deste problema, a melhor maneira de encontrar uma solução para o problema em causa consiste em generalizá-lo, considerando que no poste inicial pode estar um qualquer número n de discos.

Em particular, tal permite-nos considerar casos com poucos discos, que poderemos tentar resolver, e cuja solução nos poderá ajudar a intuir como proceder no caso geral.

Segundo passo: introduzir uma notação apropriada e estabelecer a relação de recorrência relevante.

Procuremos introduzir uma notação apropriada, caracterizando o seu significado exacto, e estabelecer a relação de recorrência relevante (se estivermos perante um problema "de natureza recursiva").

Seja t_n = ao menor número de movimentos de discos necessários para transferir n discos de um poste para outro.

Comecemos por calcular t_n para valores de n pequenos. É imediato que:

$t_1 = 1$

$t_2 = 3$

O valor de t_3 ainda se pode calcular com relativa facilidade, uma vez que é fácil de verificar que a mudança óptima de 3 discos de um poste para outro, usando o terceiro poste como auxiliar, se processa como se segue:

[3] Seguindo as ideias expostas em [27].

situação inicial:	1º movimento:	2º movimento:	3º movimento:	4º movimento:
1				
2	2		1	1
3	3 1	3 1 2	3 2	3 2

5º movimento:	6º movimento:	7º movimento:
		1
	2	2
1 3 2	1 3	3

Assim $t_3 = 7$.

Mas para valores maiores de n, as contas começam a ser mais difíceis de fazer.

Procuremos pensar recursivamente[4] e definir t_n à custa de t_{n-1} :

Ora, se queremos mudar n discos de um poste (chamemos-lhe A) para outro poste (chamemos-lhe B), usando o terceiro poste (chamemos-lhe C) como auxiliar, sem violar a restrição imposta, como o n-ésimo disco tem de ficar em baixo no poste B, a melhor solução é aquela em que quando mudamos o n-ésimo disco do poste A o mudamos logo para o poste B: para isso, o poste B tem de estar vazio e os primeiros n-1 discos têm de estar no poste C. Feita essa mudança, resta-nos mudar os primeiros n-1 discos do poste C para o poste B.

Mas o menor número de movimentos de discos necessários para mudar os primeiros n-1 discos do poste A para o poste C é dado por t_{n-1}. E o menor número de movimentos de discos necessários para mudar os primeiros n-1 discos do poste C para o poste B é também dado por t_{n-1}.

Chegamos assim à equação de recorrência[5]:

$t_n = t_{n-1} + 1 + t_{n-1} = 2\, t_{n-1} + 1$, para (qualquer) $n \geq 2$

tendo como condição inicial

$t_1 = 1$

Por outro lado, podemos considerar mesmo que o número n de discos pode ser nulo, conduzindo-nos à seguinte relação de recorrência (é imediato que com ela se obtém $t_1 = 1$ pelo que nos conduz aos mesmos valores de t_n que a relação anterior):

$t_n = 2\, t_{n-1} + 1$, para (qualquer) $n \geq 1$

$t_0 = 0$

<u>Terceiro passo</u>: <u>resolver a relação de recorrência</u>.

Resta-nos um problema: como resolver esta relação de recorrência (de modo a obter uma expressão explícita para t_n, como função de n) ?

---

[4] Uma vez que se trata de um problema que tem uma natureza claramente recursiva.

[5] Facilmente se verifica que esta relação de recorrência está de acordo com os valores calculados para t_n para valores de n pequenos. Naturalmente tal teste positivo não garante que a relação de recorrência a que chegámos está correcta, embora se o teste desse negativo, tal garantisse que ela não estaria correcta.

É claro que podemos neste momento facilmente fazer um programa computacional (recursivo) para o cálculo de t_n (e assim resolver o problema de determinar o número mínimo de movimentos de discos que os monges teriam de realizar). Mas se tivermos uma solução directa explícita é muito mais eficiente de efectuar tal cálculo (e permite-nos, ainda, ter uma ideia muito mais clara de como o número de movimentos de discos necessários evolui/cresce com o número de discos n). A tal nos vamos dedicar em seguida.

Para a resolução de relações de recorrência há também várias estratégias e técnicas possíveis, que se podem procurar utilizar (e no que se segue abordaremos algumas delas).

Primeira estratégia para a resolução de relações de recorrência:

Uma primeira estratégia consiste em procurar intuir a solução e depois provar que ela está correcta (o que tipicamente é feito por indução).

Um primeiro método para intuir a solução de uma relação de recorrência

E para intuir a solução um bom método continua a ser fazer as contas para valores de n pequenos (sucessivamente maiores), para vermos se os números obtidos exibem alguma tendência que nos permita abstrair a regra que os permite gerar. (Caso a análise dos vários valores obtidos não nos permita intuir qual a regra de geração dos sucessivos números, então teremos de procurar um outro método.)

Calculemos então alguns termos da sucessão t_n (usando a relação de recorrência em causa):

$t_0 = 0$

$t_1 = 1$

$t_2 = 3$

$t_3 = 7$

$t_4 = 15$

$t_5 = 31$

…

Neste caso, com alguma experiência, não é difícil intuir a regra que parece estar por detrás da geração destes números. De facto, notando que

$t_0 = 0 = 2^0-1$

$t_1 = 1 = 2^1-1$

$t_2 = 3 = 2^2-1$

$t_3 = 7 = 2^3-1$

$t_4 = 15 = 2^4-1$

$t_5 = 31 = 2^5-1$

…

tudo aponta para a seguinte regra de cálculo:

$t_n = 2^n-1$, para qualquer $n \geq 0$

Resta-nos <u>provar</u> que $t_n = 2^n-1$ é de facto a solução da relação de recorrência em causa, que a seguir se recorda:

$t_n = 2\ t_{n-1} +1$, para (qualquer) $n\geq 1$

$t_0 = 0$

(Que tal relação de recorrência admite uma e uma só solução já sabemos, pelos resultados estabelecidos no último capítulo.)

Essa prova é tipicamente feita por indução. Neste caso uma indução simples basta, como se ilustra a seguir.

Concretamente, queremos provar que se uma sucessão de naturais $(t_n)_{n\geq 0}$ satisfaz a relação de recorrência anterior, então verifica-se

$$\forall_{n\geq 0}\ P(n)$$

com P(n) a propriedade $t_n = 2^n-1$.

Base: Verifica-se P(0).

Dem.: Imediata, pois pela condição inicial $t_0 = 0$ e $2^0-1 = 0$.

Passo de indução: seja $n\geq 0$ qualquer.

HI: Verifica-se P(n), i.e. $t_n = 2^n-1$

Tese: Verifica-se P(n+1), i.e. $t_{n+1} = 2^{n+1}-1$

Dem.: Tem-se:

$$\begin{aligned} & t_{n+1} \\ & = \text{(equação de recorrência)} \\ & 2\ t_n +1 \\ & = \text{(HI)} \\ & 2\ (2^n-1) +1 \\ & = \\ & 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$

(c.q.d.)

<u>Exemplo (motivador) 1 - conclusão</u>:

Já sabemos calcular t_n, para qualquer número n de discos. No caso concreto do exemplo, obtém-se então que os monges necessitariam de efectuar no mínimo

$$t_{64} = 2^{64} -1$$

movimentos de discos para transferir os 64 discos de um poste para outro.

Mas uma expressão como $2^{64}-1$ não nos dá bem uma ideia concreta do número de movimentos de discos em causa. Se calcularmos o valor de $2^{64} -1$ obtemos o seguinte número:

$$t_{64} = 2^{64} -1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615 \text{ movimentos}$$

Procuremos traduzir este valor em tempo.

Assumindo que cada movimento de 1 disco demora 1 micro-segundo, i.e. 10^{-6} segundos, obtém-se

$\approx 18\ 446\ 744\ 073\ 709$ segundos

$\approx 5{,}1241 \times 10^9$ horas

$\approx 2{,}13504 \times 10^8$ dias

$\approx$ 584 942 anos

$\approx$ 5849 séculos !

e, se assumirmos que cada movimento de 1 disco demora 1 nano-segundo, i.e. 10^{-9} segundos (grosso modo um computador pessoal pode executar cerca de $2*10^9$ operações por segundo), obtém-se

$\approx$ 585 anos

$\approx$ 5,8 séculos !

e, se assumirmos que cada movimento de 1 disco demora 1 pico-segundo, i.e. 10^{-12} segundos, (um supercomputador pode executar actualmente cerca $135*10^{12}$ operações por segundo), obtém-se

$\approx$ 213,5 dias !

e, se assumirmos que cada movimento de 1 disco demora 1 femto-segundo, i.e. 10^{-15} segundos, obtém-se

$\approx$ 5,12 horas !

muito melhor, mas, mesmo assim, **intratável**, mesmo computacionalmente (nomeadamente se aumentarmos um pouco ainda o número de discos: experimente duplicar o número de discos!).

A raiz de fundo do problema reside no facto de $t_n = 2^n - 1$ crescer exponencialmente (em função do número de discos n).

Há problemas que embora sejam computáveis (teoricamente solúveis computacionalmente), demoram um tempo que na prática os torna insolúveis[6]. Estes tópicos serão abordados na disciplina de "Teoria da Computabilidade e Complexidade".

Voltando ao problema da solução de relações de recorrência, no caso anterior (das torres de Hanoi) foi possível intuir a forma do termo geral da sucessão, t_n, a partir do cálculo do valor de alguns termos iniciais dessa sucessão (no caso, t_0, t_1, t_2, t_3 e t_4).

Convém, no entanto, dispor de outras estratégias[7] e técnicas que nos permitam resolver relações de recorrência, uma vez que nem sempre é fácil intuir a solução a partir do cálculo de alguns termos iniciais (e, mesmo no caso em questão, para alguns alunos com menor experiência, talvez não fosse simples de intuir a expressão de t_n).

---

[6] Um problema análogo ocorre na área da teoria dos jogos, por exemplo na construção de programas para jogar xadrez. Há demasiadas opções para conseguir determinar em cada momento qual a melhor jogada, por exploração de todas as sequências de jogadas possíveis. São precisas estratégias de pesquisa e eliminação de opções dentro do espaço das opções/soluções possíveis. Este tópico é abordado na disciplina de "Introdução à Inteligência Artificial".

[7] Refira-se, a propósito, uma outra estratégia a que podemos recorrer, na prática, para tentar obter a solução de uma relação de recorrência: ver se ela já foi estudada (estratégia que não usaremos aqui, pois o nosso objectivo neste texto é ensinar técnicas para solucionar relações de recorrência).

Registe-se o que se diz a esse respeito na página 42 do livro [27]:

Para encontrar a solução de uma relação de recorrência, que se suspeite que já foi estudada, podemos proceder como se segue: calcular um número significativo de termos iniciais da sucessão (que a permitam distinguir de outras sucessões de números já estudadas) e ir ao livro "N.J.A. Sloane, *A Handbook of Integer Sequences*, Academic Press, 1973", onde se listam milhares de sequências de números com referências para literatura relevante (i.e. com referências para textos onde tais sequências se encontram estudadas).

Saliente-se, aliás, que existem alguns resultados gerais que nos indicam como calcular directamente a solução de relações de recorrência com determinadas características. Sobre esses resultados nos debruçaremos em secções ulteriores.

Para já, aproveitaremos um outro exemplo para ilustrar um segundo método que nos permite intuir facilmente o termo geral de sucessões definidas por recorrências com certas características, método que aplicaremos em seguida também ao caso que acabámos de analisar, das torres de Hanoi.

Vejamos um segundo exemplo motivador, agora de natureza geométrica: o chamado problema das n ovais (onde por uma oval se entende, informalmente, uma curva fechada que não se intersecta a si própria).

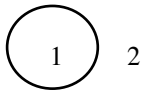
<u>Exemplo (motivador) 2</u> (o problema das n ovais):
Suponha-se que n ovais são desenhadas num plano de modo a que nenhumas três ovais se encontrem num ponto e cada par de ovais se intersecte em exactamente dois pontos.

Quantas regiões distintas do plano são criadas por essas n ovais ?

∇

Designemos por r_n o número de regiões do plano criadas por n ovais. Tem-se:

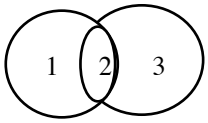
n=1:



2

Logo: $r_1 = 2$

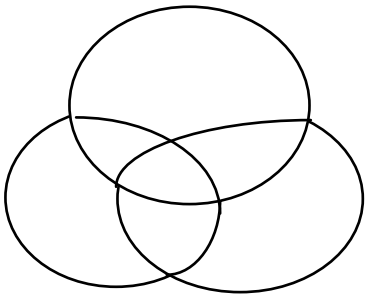
n=2:



4

Logo: $r_2 = 4$

n=3:



Logo: $r_3 = 8$

Começa a não ser fácil vizualizar geometricamente qual o valor de r_n para valores maiores de n. É mais simples generalizar e pensar recursivamente. (Embora os valores anteriores pareçam sugerir que $r_n=2^n$, podemos estar enganados, e enquanto não tivermos estabelecido as condições que r_n tem de satisfazer, não temos maneira de poder provar tal suposição).

Reformulemos o problema, analisando-o recursivamente:

- n-1 ovais dividem o plano em r_{n-1} regiões;

- A n-ésima oval cruza cada uma das n-1 ovais anteriores em 2 pontos e, portanto (como nenhumas três ovais se cruzam num mesmo ponto), a n-ésima oval cruza-se com o conjunto das n-1 ovais anteriores em 2(n-1) pontos;
- A n-ésima oval divide-se assim em 2(n-1) arcos, e cada um desses arcos vai dividir a região em que se encontra em duas (ver a figura acima com n=3);
- Assim, a n-ésima oval vai assim dar origem a mais 2(n-1) regiões.

Chegamos, portanto, à seguinte equação de recorrência

$r_n = r_{n-1} + 2(n-1)$, para (qualquer) $n \geq 2$

tendo como condição inicial

$r_1 = 2$

Procuremos resolver esta relação de recorrência.

Para isso podemos tentar aplicar a 1ª técnica que demos, calculando o valor de r_n para valores pequenos de n, tentando intuir a expressão do termo geral e provando em seguida (por indução) que ela está de facto correcta.

Como já sabíamos, obtém-se

$r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 8$

o que parece sugerir que $r_n=2^n$. Mas antes de tentarmos provar que tal suposição está correcta, calculemos mais alguns termos:

$r_4 = r_3 + 2(4-1) = 14$

$r_5 = r_4 + 2(5-1) = 22$

$r_6 = r_5 + 2(6-1) = 32$

Claramente que a nossa suposição estava errada !

Os valores obtidos não sugerem facilmente qualquer fórmula explícita para o termo geral da sucessão!

Precisamos assim de procurar um outro método que nos ajude a intuir o termo geral de uma sucessão definida por recorrência (ou uma outra estratégia para resolver relações de recorrência[8]).

<u>O método iterativo (ou da iteração)</u>

O método iterativo consiste em ir calculando r_n em termos dos seus antecessores até se chegar a (até "emergir") uma fórmula explícita para o termo geral da sucessão.

Ilustrêmo-lo para o caso em questão:

$r_n =$ (pela equação de recorrência $r_n = r_{n-1} + 2(n-1)$)

$r_{n-1} + 2(n-1) =$ (pela equação de recorrência $r_{n-1} = r_{n-2} + 2(n-2)$)

$r_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) =$ (pela equação de recorrência $r_{n-2} = r_{n-3} + 2(n-3)$)

$r_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) =$

…

[8] A estratégia da redução da relação de recorrência a uma outra relação de recorrência, mais simples, através de uma adequada substituição, que daremos à frente, também não parece ajudar neste caso.

$r_{n-k} + 2(n-k) + ... + 2(n-1) =$ (considerando k=n-1, obtém-se)

$r_1 + 2(1) + ... + 2(n-1) =$

$r_1 + 2(1 + ... + n-1) =$ (usando a condição inicial - $r_1 = 2$ - e o símbolo de somatório)

$2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} i =$ (soma de uma progressão aritmética)

$2 + 2(\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)) =$ (simplificando)

$2 + n\ (n-1)$

Ou seja:

$r_n = n^2 - n + 2$ (para $n \geq 1$)

Refira-se um aspecto que diferencia o método iterativo do primeiro método ilustrado (no âmbito do exemplo das Torres de Hanoi) para a resolução de relações de recorrência.

No caso do primeiro método ilustrado, nós calculávamos alguns termos iniciais da sussessão e a partir deles procurávamos abstrair/intuir a expressão do termo geral da sucessão. Mas nada nos garantia que não nos tivéssemos enganado nessa intuição (por exemplo, no caso das n ovais os primeiros termos são $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 8$, o que leva logo a supor que $r_n=2^n$, suposição que está no entanto errada, como vimos). Assim, era *fundamental* provar que a expressão intuída para o termo geral estava correcta, prova tipicamente feita por indução.

No caso do método iterativo, nós podemos considerar que a forma como chegamos à expressão do termo geral da sucessão já constituí (*pelo menos em certos casos*) uma sua dedução (ainda que de algum modo informal), não se tornando estritamente necessário provar (por indução) que ela está correcta.

De qualquer forma, como nos podemos ter enganado nalgum cálculo, é sempre uma boa prática <u>testar</u> o resultado a que chegámos, testando a expressão que obtivemos para o termo geral para alguns dos valores de r_n que já calculámos. Tal é feito a seguir:

$r_1 = 1^2 - 1 + 2 = 2$

$r_2 = 2^2 - 2 + 2 = 4$

$r_3 = 3^2 - 3 + 2 = 8$

$r_4 = 4^2 - 4 + 2 = 14$

…

E, embora tal não seja estritamente necessário (pelo que observámos acima), podemos sempre reforçar a nossa certeza na correcção da solução obtida, através de uma prova por indução, o que é feito a seguir (aproveitando para dar mais uma ilustração de provas por indução).

Provemos então, para terminar este exemplo, por indução (simples em $n \geq 1$) que:

$$\forall_{n\geq 1}\ r_n = n^2 - n + 2$$

Base: n=1

Dem.: Tem-se $r_1 = 2$ (a condição inicial) e $1^2 - 1 + 2 = 2$ (c.q.d.)

Passo de indução: Seja $n \geq 1$ qualquer.

HI: $r_n = n^2 - n + 2$

Tese: $r_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 2$

Dem.: Tem-se

r_{n+1}

$=$ (equação de recorrência)

$r_n + 2\,n$

$=$ (HI)

$n^2 - n + 2 + 2\,n$

$=$

$n^2 + n + 2$

E

$(n+1)^2 - (n+1) + 2 \;=\; n^2 + 2\,n + 1 - n - 1 + 2 \;=\; n^2 + n + 2$

(c.q.d.)

<u>Uma outra ilustração do método iterativo</u>

Vejamos uma nova ilustração do método iterativo, aplicando-o agora à resolução da relação de recorrência obtida para as Torres de Hanoi, que a seguir se recorda:

$t_0 = 0$

$t_n = 2\,t_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$

Aplicando o método iterativo obtém-se:

$t_n \;=$	(pela equação de recorrência $t_n = 2\,t_{n-1} + 1$)
$2\,t_{n-1} + 1 =$	(pela equação de recorrência $t_{n-1} = 2\,t_{n-2} + 1$)
$2(2\,t_{n-2} + 1) + 1 =$	(simplificando)
$2*2\,t_{n-2} + 2 + 1 =$	(pela equação de recorrência $t_{n-2} = 2\,t_{n-3} + 1$)
$2*2\,(2\,t_{n-3} + 1) + 2 + 1 =$	(simplificando)
$2*2*2\,t_{n-3} + 2*2 + 2 + 1 =$	(pela equação de recorrência $t_{n-3} = 2\,t_{n-4} + 1$)
$2*2*2\,(2\,t_{n-4} + 1) + 2*2 + 2 + 1 =$	(simplificando)
$2*2*2*2\,t_{n-4} + 2*2*2 + 2*2 + 2 + 1 =$	(isto é)
$2^4\,t_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 =$	(parece claro que se obtém)
…	
$2^k\,t_{n-k} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 2^0 =$	(e, considerando k=n, obtém-se)
$2^n\,t_0 + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 2^0 =$	(pela condição inicial, $t_0 = 0$)
$2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 2^0 =$	
$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i =$	(soma de uma progressão geométrica)

$$\frac{2^{(n-1)+1}-1}{2-1} = \qquad \text{(simplificando)}$$

$2^n - 1$

(como já sabíamos)

O método iterativo funciona muitas vezes bem para relações de recorrência com uma forma genérica do tipo:

$u_0 = b_0$

$u_n = a_n\, u_{n-1} + b_n$

com a_n e b_n constantes ou expressões envolvendo n, mas não envolvendo "a recorrência u" (i.e. não envolvendo termos da sucessão u que estamos a definir por recorrência).

Já vimos exemplos com:

- a_n e b_n constantes (o caso das torres de Hanoi)
- a_n constante e b_n uma função de n (o caso das n ovais)

Por outro lado, como vimos nesses exemplos, a aplicação do método iterativo conduz-nos em geral a somatórios[9].

Refira-se ainda que o método iterativo pode ser apresentado de uma outra forma conhecida como a técnica (ou método) do cancelamento, que passamos a ilustrar, primeiro para os dois casos particulares abordados (n ovais e torres de Hanoi) e depois para o caso geral acabado de mencionar.

Técnica do cancelamento - caso das n ovais:

Relação de recorrência:

$r_1 = 2$

$r_n = r_{n-1} + 2(n-1)$, para $n \geq 2$

Aplicação da técnica do cancelamento:

$r_n = r_{n-1} + 2(n-1)$ (aplicar a equação de recorrência)

$r_{n-1} = r_{n-2} + 2(n-2)$ (aplicar a equação de recorrência)

…

$r_3 = r_2 + 2(2)$ (aplicar a equação de recorrência)

$r_2 = r_1 + 2(1)$ (aplicar a equação de recorrência)

Somando obtém-se

$r_n + r_{n-1} + ... + r_2 = r_{n-1} + ... + r_2 + r_1 + 2\,(1 + 2 + ... + n-1)$

Cancelando $(r_{n-1} + ... + r_2)$ obtém-se

$r_n = r_1 + 2\,(1 + 2 + ... + n-1)$

---

[9] Embora nem sempre: considere, por exemplo, o caso em que a_n é constante e $b_n = 0$.

Isto é (usando a condição inicial e o símbolo de somatório)

$$r_n = 2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} i$$

a mesma expressão que obtivemos pelo método iterativo.

<u>Técnica do cancelamento - torres de Hanoi</u>:

Relação de recorrência:

$t_0 = 0$

$t_n = 2\ t_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$

Aplicação da técnica do cancelamento:

$t_n = 2\ t_{n-1} + 1$ (aplicar a equação de recorrência)

$2\ t_{n-1} = 2(2\ t_{n-2} + 1) = 2^2\ t_{n-2} + 2$ (aplicar a equação de recorrência e simplificar)

$2^2\ t_{n-2} = 2^2(2\ t_{n-3} + 1) = 2^3\ t_{n-3} + 2^2$ (aplicar a equação de recorrência e simplificar)

…

$2^{n-2}\ t_{n-(n-2)} = 2^{n-2}(2\ t_1 + 1) = 2^{n-1}\ t_1 + 2^{n-2}$ (aplicar a equação de recorrência - $t_{n-(n-2)}=t_2$ - e simplificar)

$2^{n-1}\ t_1 = 2^{n-1}(2\ t_0 + 1) = 2^n\ t_0 + 2^{n-1}$

Somando obtém-se

$t_n + 2\ t_{n-1} + ... + 2^{n-1}\ t_1 = 2\ t_{n-1} + ... + 2^{n-1}\ t_1 + 2^n\ t_0 + 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1}$

Cancelando ($2\ t_{n-1} + ... + 2^{n-1}\ t_1$) obtém-se

$t_n = 2^n\ t_0 + 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1}$

Isto é (usando a condição inicial e o símbolo de somatório)

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i$$

a mesma expressão que obtivemos pelo método iterativo.

<u>Técnica do cancelamento - caso geral</u>:

Relação de recorrência:

$u_0 = b_0$

$u_n = a_n\ u_{n-1} + b_n$, para $n \geq 1$

com a_n e b_n constantes ou expressões envolvendo n, mas não envolvendo "a recorrência u"

Aplicação da técnica do cancelamento:

$u_n = a_n\ u_{n-1} + b_n$ (aplicar a equação de recorrência)

$a_n\ u_{n-1} = a_n(a_{n-1}\ u_{n-2} + b_{n-1}) = a_n a_{n-1}\ u_{n-2} + a_n b_{n-1}$ (aplicar a equação de recorrência e simplificar)

$a_n a_{n-1}\ u_{n-2} = a_n a_{n-1}(a_{n-2}\ u_{n-3} + b_{n-2}) = a_n a_{n-1} a_{n-2}\ u_{n-3} + a_n a_{n-1} b_{n-2}$ (idem)

…

$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 u_1 = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 (a_1 u_0 + b_1) = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 u_0 + a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 b_1$ (idem)

Somando e cancelando ($a_n u_{n-1} + \ldots + a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 u_1$) obtém-se

$u_n = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 u_0 + b_n + a_n b_{n-1} + a_n a_{n-1} b_{n-2} + \ldots + a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 b_1$

Isto é (usando a condição inicial, reajustando a ordem das somas e dos produtos, e usando o símbolo do somatório):

$$u_n = b_n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i a_{i+1} \ldots a_n$$

expressão que ainda pode ser reescrita, recorrendo ao símbolo do produtório, como se segue:

$$u_n = b_n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \left(\prod_{k=i+1}^{n} a_k \right)$$

Refira-se que esta dedução da forma para o caso geral é aqui efectuada com fins ilustrativos. Quando quisermos resolver uma recorrência deste tipo, tanto podemos aplicar esta forma geral a esse caso concreto (e depois tentar resolver o somatório em causa), como poderemos aplicar directamente a técnica do cancelamento, ou o método iterativo, ao caso concreto em questão (o que em certos casos talvez até possa ser, ou pelo menos parecer, mais simples).

Exemplo 3 [10]:

Assuma-se um modelo económico em que a oferta e a procura são determinadas por equações lineares.

Mais especificamente, a procura é dada pela equação

$$p = a - b\,q$$

onde p é o preço, q é a quantidade e a e b são constantes (parâmetros) positivas. A ideia é que se o preço cresce os consumidores compram menos quantidade do produto em causa.

A oferta é dada pela equação

$$p = k\,q$$

onde p é o preço, q é a quantidade e k é uma constante (parâmetro) positiva. A ideia é que se o preço cresce a empresa vendedora deseja aumentar o produto em venda.

Assuma-se ainda que há um lapso de tempo no modo como a oferta reage a alterações. (Por exemplo, demora tempo a conseguir aumentar a oferta do produto.)

Considerando intervalos de tempo discretos, designaremos por p_n o preço no instante n (p_0 será o preço inicial e p_n, com $n \geq 1$, será o preço no fim do n-ésimo intervalo de tempo).

Assumimos que a procura é dada pela equação:

$$p_n = a - b\,q_n,\ n \geq 0 \quad (*)$$

significando que, no instante n, a quantidade q_n será vendida ao preço p_n, e assumimos que a oferta é regulada pela equação

[10] Exemplo tirado do livro [34] (páginas 263, 264, 273 e 274).

$$p_n = k\, q_{n+1},\ n \geq 0 \quad (**)$$

significando que é necessária uma unidade de tempo para a empresa vendedora ajustar a quantidade ao preço, isto é, só no instante n+1 a quantidade (q_{n+1}) será ajustada ao preço do instante n (p_n).

Resolvendo a equação (**) da oferta, em ordem a q_{n+1}, e substituindo na equação (*) da procura no instante n+1, obtém-se a seguinte equação de recorrência para o preço

$$p_{n+1} = a - \frac{b}{k} p_n \text{, para } n \geq 0$$

isto é, de forma equivalente

$$p_n = a - \frac{b}{k} p_{n-1} \text{, para } n \geq 1$$

Olhando para esta equação de recorrência podemos notar que se $\frac{b}{k} = 1$, o preço oscila entre p_0 e p_1:

$$p_1 = a - p_0 \ ,\ \ p_2 = a - p_1 = p_0 \ ,\ \ p_3 = p_1 \ ,\ \ldots$$

Para a solução desta equação de recorrência podemos recorrer ao método iterativo, designando (para simplicar as contas) $-\frac{b}{k}$ por s:

$$\begin{aligned}
p_n &= a + s p_{n-1} \\
&= a + s(a + s p_{n-2}) = a + sa + s^2 p_{n-2} = \\
&= a + sa + s^2(a + s p_{n-3}) = a + sa + s^2 a + s^3 p_{n-3} = \\
&\ldots \\
&= a + sa + s^2 a + s^3 a + \ldots + s^{n-1} a + s^n p_0 = \\
&= a \sum_{i=0}^{n-1} s^i + s^n p_0 \qquad \text{(soma de uma progressão geométrica)} \\
&= a \frac{s^n - 1}{s - 1} + s^n p_0 \\
&= s^n \left(\frac{-a}{1-s} + p_0\right) + \frac{a}{1-s} \qquad \left(s = -\frac{b}{k}\right) \\
&= \left(-\frac{b}{k}\right)^n \left(\frac{-ak}{k+b} + p_0\right) + \frac{ak}{k+b}
\end{aligned}$$

E, olhando para a expressão geral obtida para p_n, podem-se tirar algumas conclusões:

- Se $\frac{b}{k} < 1$, a parcela $\left(-\frac{b}{k}\right)^n \left(\frac{-ak}{k+b} + p_0\right)$ vai diminuindo à medida que n cresce, de modo a que o preço tende a estabilizar à volta aproximadamente de $\frac{ak}{k+b}$;
- Se $\frac{b}{k} = 1$, como já tinhamos observado, p_n oscila entre p_0 e p_1:
- Se $\frac{b}{k} > 1$, as diferenças entre os preços sucessivos crescem:

$$p_{n+1} - p_n = \left(-\frac{b}{k}\right)^n c, \text{ com } c = \left(\frac{-ak}{k+b} + p_0\right)\left(-\frac{b}{k} - 1\right)$$

∇

Outras estratégias para a resolução de relações de recorrência – redução a uma mais simples:

Procurar transformar a relação de recorrência numa outra relação de recorrência mais simples, ou que já saibamos resolver, através da *manipulação da equação de recorrência* em causa e *recorrendo, eventualmente, a uma substituição / mudança de variável conveniente*.

∇

Ilustremos esta técnica através de alguns exemplos.

Exemplo 1 revisitado:

No caso das torres de Hanoi, foi possível intuir a forma do termo geral da sucessão, t_n, a partir do cálculo do valor de alguns termos iniciais dessa sucessão. Mas, como já referimos, para alguns alunos com menor experiência, talvez não fosse simples de intuir a expressão de t_n, a partir do cálculo desses valores.

Se olharmos para a relação de recorrência em causa:

$t_0 = 0$

$t_n = 2\, t_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$

facilmente se constata que é o "+1" ocorrendo na equação de recorrência que torna mais difícil a intuição da expressão do termo geral t_n.

Ora a relação de recorrência em causa pode ser "simplificada", ou, mais precisamente, pode ser transformada numa outra relação de recorrência mais simples. Vejamos como:

- Comece-se por adicionar 1 a ambos os membros das equações em causa:

  $t_0 + 1 = 1$

  $t_n + 1 = 2\, t_{n-1} + 2$

- A última equação pode ser reescrita como se segue:

  $t_n + 1 = 2\, (t_{n-1} + 1)$

- Assim, chamando u_n a t_n+1 (substituindo t_n+1 por u_n), isto é, efectuando a mudança de variável[11]:

  $u_n = t_n + 1$

  obtém-se a seguinte relação de recorrência

  $u_0 = 1$

  $u_n = 2\, u_{n-1}$

  mais simples de resolver que a inicial.

- De facto, usando a primeira estratégia dada atrás para resolver relações de recorrência, podemos calcular alguns termos iniciais da sucessão u_n:

  $u_0 = 1$

  $u_1 = 2$

  $u_2 = 4$

  $u_3 = 8$

  a partir dos quais é imediato intuir a seguinte expressão para o termo geral:

  $u_n = 2^n$

[11] Que corresponde a definir $u_n = f(t_n)$, com f a função que aplica cada natural no seu sucessor.

solução que se pode comprovar por indução simples.

- E, a partir da expressão de u_n, obtém-se a seguinte expressão para t_n[12]:

  $t_n = u_n - 1 = 2^n - 1$

  (como já sabíamos).

∇

Exemplo (complementar) 4 [13]:

A um jantar n pessoas deixam os seus sobretudos, marcando-os (através de alguma identificação). Quando o jantar termina, os sobretudos são devolvidos aleatoriamente. Infelizmente, ninguém recebe o seu sobretudo. Designando por D_n o número de maneiras possíveis de distribuir n sobretudos por n pessoas de modo que nenhuma pessoa receba o seu sobretudo[14], pretende-se saber calcular D_n (para qualquer $n \geq 1$).

Comecemos por calcular alguns valores iniciais de D_n.

É imediato que $D_1 = 0$ e que $D_2 = 1$.

Calculemos ainda D_3.

Procurando uma notação simples que nos ajude a descrever a distribuição efectuada dos sobretudos, escreveremos

$$< S1, S2, ..., Sn >$$

para designar que a pessoa i (i=1,...,n) recebeu o sobretudo Si (onde Si é um número, entre 1 e n, que identifica o dono desse sobretudo. Assim, por exemplo, <3, 2, 1> descreve a distribuição em que a pessoa 1 recebeu o sobretudo da pessoa 3, a pessoa 2 recebeu o seu próprio sobretudo e a pessoa 3 recebeu o sobretudo da pessoa 1.

Procuremos então quantas maneiras existem de 3 pessoas receberem os sobretudos todos trocados. Em tal caso, das duas uma: a pessoa 1 ou recebeu o sobretudo 2 ou o sobretudo 3. Consideremos o caso em que a pessoa 1 recebeu o sobretudo 2 e procuremos as distribuições que possam conduzir a tal situação: <2, ???, ??? >. As hipóteses são <2, 3, 1> ou <2, 1, 3>, mas no último caso a pessoa 3 teria recebido o sobretudo certo. Logo a única possibilidade é <2, 3, 1>. Igualmente a única distribuição "que funciona", começando por 3 é <3, 1, 2>. Assim $D_3 = 2$.

Calculemos ainda D_4, até para servir de teste à solução geral a que chegarmos.

A pessoa 1 terá o sobretudo 2, 3 ou 4 (3 hipóteses). Suponha-se que a pessoa 1 tem o sobretudo 2 (os outros casos são análogos). Há as seguintes hipóteses:

a) <2, 1, ???, ???>: neste caso há os sobretudos 3 e 4 para distribuir (erradamente) pelas pessoas 3 e 4. Quantas maneiras temos de isso poder acontecer ? $D_2 = 1$ (distribuição <2, 1, 4, 3>)

---

[12] Desde que se tenha $u_n = f(t_n)$, com f injectiva, podemos sempre retornar de t_n a u_n (pois se f é injectiva, existe a sua função inversa e esta está definida obviamente em todo o ponto do contradomínio de f): $t_n = f^{-1}(u_n)$ (no caso em questão $f^{-1}(u_n)=u_n-1$).

Saliente-se, contudo, que isto não significa que não se possam fazer substituições que não correspondam a mudanças de variáveis deste tipo: veja-se p.ex. o exemplo 4 a seguir.

[13] Tirado do livro [34] (páginas 284-287).

[14] Uma permutação de n elementos na qual nenhum elemento está na sua posição original é conhecida pelo nome técnico de um "desarranjo" (desordem): *a derangement*.

b) <2, 3, ???, ???>: a única hipótese é a distribuição <2, 3, 4, 1>

c) <2, 4, ???, ???>: a única hipótese é a distribuição <2, 4, 1, 3>

Logo $D_4 = 3 * 3 = 9$

Podemos procurar calcular D_5, mas o melhor é pensar recursivamente e tentar abstrair melhor os tipos de situações possíveis relevantes.

Suponha-se que temos n pessoas e consideremos uma qualquer dessas pessoas (sem perca de generalidade podemos supor que se trata da pessoa 1). Seja j o sobretudo que recebeu a pessoa 1 (isto é, S1=j) Para todas as pessoas terem os sobretudos errados, *há* n-1 *possibilidades para* j: 2, ..., n (a pessoa 1 terá de ter um dos sobretudos de 2 a n).

Agora há duas situações possíveis:

a) A pessoa j recebeu o sobretudo da pessoa 1. (Supondo que a pessoa j é a pessoa 2, a distribuição será do tipo <2, 1, ???, ..., ???>). Então o conjunto das restantes n-2 pessoas têm exactamente os seus sobretudos, embora "todos trocados". Quantas maneiras há de isso poder acontecer ? *Exactamente* D_{n-2}.

b) Ou, o caso aparentemente mais complicado, em que a pessoa j não recebeu o sobretudo da pessoa 1. Sem perca de generalidade, para simplificar, podemos supor que a pessoa j é a pessoa 2. Temos então agora de ver quantas maneiras diferentes temos de distribuir os sobretudos 1, 3, 4, ..., n pelas pessoas 2, 3, 4, ..., n, de modo a que a pessoa 2 não fique com o sobretudo 1 e todas as pessoas fiquem com sobretudos errados. Como o sobretudo 1 não pode ir parar à pessoa 2 e o sobretudo 2 não está na lista de sobretudos disponíveis, o problema é exactamente análogo ao que se obtém se designarmos o sobretudo 1 por 2 e perguntarmos quantas maneiras há de distribuir os n-1 sobretudos 2, 3, 4, ..., n pelas pessoas 2, 3, 4, ..., n, de modo a que todas as pessoas fiquem com sobretudos errados. *Exactamente* D_{n-1}.

Chegamos assim à seguinte relação de recorrência (que facilmente se verifica que dá o valor atrás obtido para D_3 e D_4):

- condições iniciais

  $D_1 = 0$

  $D_2 = 1$

- equação de recorrência

  $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, para $n \geq 3$

Chegados aqui, temos ainda um problema: o de calcular a solução desta relação de recorrência[15].

O cálculo de valores iniciais não induz uma tendência clara, e a forma da sua equação sugere que o método iterativo também não funcionará bem.

Mas podemos sempre tentar manipular a equação de recorrência, de modo a ver se a conseguimos reduzir a uma que saibamos resolver, recorrendo se necessário a uma substituição adequada.

Ora:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \Leftrightarrow D_n = n\,D_{n-1} - D_{n-1} + (n-1)\,D_{n-2} \Leftrightarrow D_n - n\,D_{n-1} = -\,D_{n-1} + (n-1)\,D_{n-2}$$

[15] De acordo com a terminologia a introduzir na próxima secção, estamos perante uma recorrência linear homogénea, de ordem 2, mas sem coeficientes constantes (nas próximas secções analisaremos como resolver as recorrências lineares, homogéneas e não homogéneas, mas de coeficientes constantes).

e, fazendo a substituição $C_n = D_n - n\ D_{n-1}$ (para $n \geq 2$), a equação anterior transforma-se na equação de recorrência

- $C_n = - C_{n-1}$, para $n \geq 3$

tendo como condição inicial

- $C_2 = D_1 - 1 * D_0 = 1$

recorrência que já podemos tentar resolver recorrendo (por exemplo) ao método iterativo[16]:

$$C_n = - C_{n-1} = (-1)^2\ C_{n-2} = \ \ldots\ = (-1)^k\ C_{n-k} = (-1)^{n-2}\ C_2 = \ (-1)^{n-2} = (-1)^n \ \text{ (para } n \geq 2)$$

e a partir da expressão de C_n, podemos tentar resolver D_n.

Como $C_n = D_n - n\ D_{n-1}$ (para $n \geq 2$), obtém-se $D_n - n\ D_{n-1} \ = \ (-1)^n$, chegando-se assim à seguinte equação de recorrência:

- $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, para $n \geq 2$

que já podemos tentar resolver aplicando o método iterativo:

$$D_n \ = nD_{n-1} + (-1)^n\ D_n =$$

$$n((n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1}) + (-1)^n =$$

$$n(n-1)D_{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n =$$

$$n(n-1)((n-2)D_{n-3} + (-1)^{n-2}) + n(-1)^{n-1} + (-1)^n =$$

$$n(n-1)(n-2)D_{n-3} + n(n-1)(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n =$$

$$\ldots =$$

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)D_{n-k} + n(n-1)\ldots(n-k+2))\ (-1)^{n-k+1} + \ldots. + n(-1)^{n-1} + (-1)^n \ = \qquad \text{(fazendo } k=n-1)$$

$$n(n-1)\ldots 2\ D_1 + n(n-1)\ldots 3\ (-1)^2 + \ldots + n(-1)^{n-1} + (-1)^n \ = \qquad \text{(como } D_1=0)$$

$$n(n-1)\ldots 3\ (-1)^2 + \ldots + n(-1)^{n-1} + (-1)^n \ =$$

$$\sum_{i=2}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!} =$$

$$n! \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \ = \qquad \text{(pois } \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 0\text{)}$$

$$n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

e mais uma vez o método iterativo nos conduziu a um somatório.

Deixa-se como exercício confirmar (provar), por indução, que

---

[16] De acordo com a terminologia a introduzir na próxima secção, estamos perante uma recorrência linear de ordem 1, homogénea e de coeficientes constantes, pelo que também a poderíamos resolver recorrendo aos resultados que formularemos na próxima secção.

$$D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}, \text{ para } n\geq 1,$$

satisfaz a relação de recorrência a que chegámos inicialmente para $(D_n)_{n\geq 1}$.

∇

Exercícios:

1. Suponha-se que a população de uma dada espécie animal, numa determinada localidade, é contada no fim de cada ano, desde há 3 anos.

   Designando por p_n o número de elementos da espécie aquando da (n+1)-ésima contagem, sabe-se que $p_0 = 200$ (isto é, há 3 anos, aquando da 1ª contagem, havia 200 elementos da espécie em questão) e verificou-se que no fim de cada ano o número de elementos da espécie em questão era igual a metade do número de elementos existentes no fim do ano anterior, menos 10 unidades, isto é

$$p_n = \frac{p_{n-1}}{2} - 10$$

   a) Assumindo que a tendência verficada se mantém, obtenha uma expressão explícita para p_n como função de n, recorrendo ao método iterativo. (Sugestão: não efectue as divisões de 10 por 2, de 10 por 4, etc., mantendo-as na forma de um quociente.)
   b) Prove, por indução, que a expressão a que chegou satisfaz a a relação de recorrência em causa.
   c) A manter-se a tendência verficada, daqui a quantos anos a espécie em questão estará extinta ?
2. Suponha que a população de veados, numa determinada localidade, é de 1000 no instante n=0 e que o crescimento da população do instante n-1 para o instante n é igual a 10% do tamanho que tinha no instante n-1. Escreva a relação de recorrência em causa (a equação de recorrência mais a condição inicial) e resolva essa relação de recorrência.
3. Sabendo que

   $S_1 = 1$

   $S_n = S_{n-1} + n$, para $n\geq 2$

   Demonstre por indução que

$$S_n = \frac{1+n}{2}n, \text{ para } n\geq 1$$

4. Sabendo que

   $a_0 = 1$

$$a_n = \frac{4a_{n-1}}{n}, \text{ para } n\geq 1$$

   Demonstre por indução que

$$a_n = \frac{4^n}{n!}, \text{ para } n\geq 0$$

5. Foram investidos 500 euros numa aplicação de risco, estimando-se que no fim de cada ano essa aplicação possa render 10% de juros (relativamente ao montante existente no início do ano). Sendo p_n a quantia (em euros) existente na aplicação em questão no início do n-ésimo ano:
   a) Escreva a condição inicial e a equação de recorrência para p_n, assumindo o comportamento estimado.

b) Encontre uma expressão explícita para p_n (como função de n) e prove por indução que ela satisfaz a relação de recorrência a que chegou na alínea a).

6. Numa experiência, uma colónia de bactérias tem inicialmente uma população de 50000. e é feita uma leitura a cada hora, verificando-se que no final de cada hora existem três vezes mais bactérias que no final da hora anterior. Designando por p_n o número de bactérias existente na n-ésima leitura:
   a) Escreva a equação de recorrência e a condição inicial que p_n satisfaz.
   b) Encontre uma expressão explícita para p_n (como função de n) e prove por indução que ela satisfaz a relação de recorrência a que chegou na alínea a).
7. Resolva a seguinte recorrência:

   $a_1 = 0$

   $a_n = a_{n-1} + 4$, para $n \geq 2$
8. Resolva a seguinte recorrência:

   $a_1 = 0$

   $a_n = a_{n-1} + 2n$, para $n \geq 2$
9. Um Sr. A emprestou 1000 euros a um Sr. B, com a seguinte combinação: a dívida (mais os respectivos juros) terá de ser paga de uma só vez; e, até à liquidação da dívida, por cada dia que passe o Sr. B fica a dever mais 50 cêntimos ao Sr. A (a título de juros).

   Sendo p_n a quantia (em euros) que o Sr. B deve ao Sr. A ao fim n dias (sem pagar a dívida):

   a) Escreva a condição inicial e a equação de recorrência para p_n, assumindo o comportamento estimado.

   b) Encontre uma expressão explícita para o valor de p_n (como função de n), e prove por indução que essa expressão está correcta.
10. Considere a sucessão a_n definida pela relação de recorrência:

    $a_1 = 10$

    $a_n = a_{n-1} + 4(n-1)$ (para $n \geq 2$)

    a) Use o método iterativo para chegar à seguinte expressão explícita para a_n:

    $a_n = 2n^2 - 2n + 10$

    b) Prove por indução que essa expressão de a_n ($n \geq 1$) está correcta.
11. Admita que há actualmente 1000 baleias numa certa zona e que se estima que em cada ano o aumento natural (decorrente de nascimentos e mortes naturais, não causadas pelo Homem) da população das baleias (nessa zona) é de 25%. Admita ainda que o Homem mata cerca de 100 baleias por ano.

    Designando por p_n ($n \geq 0$) o número de baleias que se prevê existirem (de acordo com as hipóteses assumidas) daqui a n anos (sendo p_0 o número de baleias actualmente existentes):

    a) Escreva a condição inicial e a equação de recorrência para p_n.

    b) Usando o método iterativo, encontre uma expressão explícita para o valor de p_n como função de n (não se exige que prove por indução que essa expressão está correcta).
12. Considere uma hipotética máquina de jogo (de um casino) que funciona como se segue:

    • Para efectuar a primeira jogada, o jogador tem de colocar na máquina a quantia exacta de 100 euros (ou fichas equivalentes a esse valor);

• Em cada jogada, se o jogador não acertar, perde tudo o que apostou; se acertar, pode receber o prémio que lhe é devido, ou pode apostar esse prémio numa nova jogada (sem introduzir qualquer dinheiro adicional);

• Na primeira jogada, a máquina paga o dobro da aposta do jogador (recorde-se que a aposta do jogador na primeira jogada é de 100 euros);

• Em cada jogada seguinte, supondo que o jogador acertou na jogada anterior e apostou o prémio, a máquina paga o dobro do que pagava na jogada anterior, acrescido de 50 euros.

Designando por p_n ($n \geq 1$) o prémio (a quantia em euros) que a máquina paga aquando da n-ésima aposta, supondo que até aí o jogador acertou sempre e nunca levantou o prémio (apostando-o sempre):

a) Escreva a condição inicial e a equação de recorrência para p_n.

b) Use o método iterativo para chegar à seguinte expressão explícita para p_n:

$$p_n = 250 * 2^{n-1} - 50$$

c) Prove por indução que essa expressão de p_n ($n \geq 1$) está correcta.

∇

Secção 3: Relações de recorrência, lineares e homogéneas, de coeficientes constantes

Consideremos agora a relação de recorrência que define a sucessão dos números de Fibonacci.

Descrição do problema posto em 1202 por Leonardo de Pisa (mais conhecido por "Fibonacci"[17])

Um par de coelhos de sexo oposto, recém-nascidos, são colocados num local rodeado por uma cerca, no início de um ano. Começando no segundo mês, a coelha dá à luz um par de coelhos, de sexos opostos, no fim de cada mês. Começando no segundo mês, cada novo par de coelhos também dá origem a um outro par de coelhos (de sexo oposto), no fim de cada mês. Pretende-se saber qual o número de pares de coelhos existente nesse cercado ao fim de um ano (supondo que não há mortes de coelhos).

∇

Comecemos por definir uma notação apropriada e por generalizar o problema, procurando determinar antes o número de pares de coelhos existentes no início de cada mês, e não apenas ao fim de um ano (continuando a supor que não há mortes de coelhos).

Designemos por f_n o número de pares de coelhos existentes no cercado no início do n-ésimo mês.

Pretendemos calcular f_{13}.

É imediato que:

- $f_1 = 1$ (no início do primeiro mês só existe o par de coelhos inicial, recém-nascido);
- $f_2 = 1$ (durante o primeiro mês a coelha inicial não faz nascer qualquer par de coelhos);
- $f_3 = 2$ (no fim do 2º mês a fémea inicial deu origem a um novo par de coelhos, pelo que no início do 3º mês já há dois pares de coelhos);

[17] O nome Fibonacci significa "filho de Bonacci".

- $f_4 = 3$ (no fim do 3º mês a fémea inicial deu origem a um novo par de coelhos, mas a segunda coelha ainda não deu à luz qualquer par de coelhos, pois no fim do 3º mês vai iniciar apenas o seu 2º mês de vida)

e podemos prosseguir com o cálculo de f_5, f_6, ..., mas, para não nos perdermos na contagem dos pares de coelhos existentes no início de cada mês, o melhor é pensar recursivamente e definir uma relação de recorrência para f_n.

No início do mês n, podemos dividir os pares de coelhos existentes em duas classes: (E_{n-1}) os que já Existiam no início do mês n-1 e (RN_n) os que nasceram no fim desse mês n-1 e que são Recém-Nascidos no início do mês n. Isto é $f_n=\#E_{n-1}+\#RN_n$ e $\#E_{n-1}= f_{n-1}$. Analogamente, os pares de coelhos existentes no início do mês n-1 podem ser divididos em duas classes: (E_{n-2}) os que já existiam no início do mês n-2 e (RN_{n-1}) os que recém-nascidos no início do mês n-1. Os pares de coelhos em RN_{n-1} não dão origem a qualquer novo par de coelhos durante o mês n-1, que é o seu primeiro mês de vida. Por sua vez, no início do mês n-1, cada par em E_{n-2} estará a iniciar pelo menos o seu segundo mês de vida, pelo que no fim do mês n-1 darão origem a um novo para de coelhos. Logo $\#RN_n = \#E_{n-2}= f_{n-2}$.

Chegamos assim à seguinte equação de recorrência:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ para } n\geq 3$$

e a partir desta equação e dos valores iniciais indicados atrás, podemos calcular o valor pretendido:

$f_1 = 1$
$f_2 = 1$
$f_3 = 1+1 = 2$
$f_4 = 2+1 = 3$
$f_5 = 3+2 = 5$
$f_6 = 5+3 = 8$
$f_7 = 13$
$f_8 = 21$
$f_9 = 34$
$f_{10} = 55$
$f_{11} = 89$
$f_{12} = 144$
$f_{13} = 233$

Conseguimos resolver o problema concreto proposto por Fibonacci, mas agora nós estamos interessados em estudar a sucessão de números que tal problema origina, e que tem propriedades e aplicações muito interessantes. E, nomeadamente, gostaríamos de encontrar uma expressão explícita para o termo geral de tal sucessão.

Comecemos por notar que é imediato que se pode estender tal sucessão ao índice 0, mantendo a equação de recorrência (mas agora para qualquer $n\geq 2$)

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ para } n\geq 2$$

e considerando como condições iniciais

$f_0 = 0$

$f_1 = 1$

Procuremos então resolver esta relação de recorrência recorrendo aos métodos já estudados.

O primeiro método, calcular vários termos iniciais e a partir deles procurar intuir a expressão do termo geral (provando depois, por indução, que ela está correcta), não parece que nos leve a lado nenhum neste caso. De facto, olhando para os termos que já calculámos (até f_{13}), não se vislumbra qualquer tendência que se possa expressar facilmente.

Igualmente não se vê como a podemos simplificar ou como uma mudança de variável poderá ajudar a resolver esta relação de recorrência. E esta relação de recorrência também não se enquadra na forma geral das relações de recorrência para as quais dissemos atrás que o método iterativo, ou o método do cancelamento, funcionava bem (que tinham a forma $u_n=a_nu_{n-1}+b_n$).

Acontece que a relação de recorrência de Fibonacci pertence a uma classe de relações de recorrência para as quais há métodos directos de solução, de aplicação muito simples, que analisaremos em seguida. Antes, porém, comecemos por definir uma classe muito vasta de relações de recorrência, à qual pertencem todas as recorrências consideradas até ao momento.

<u>Definição 1:</u>

a) Uma *equação de recorrência linear*, *de ordem* (ou *grau*) k (≥1), é uma equação de recorrência da forma

$$u_n = c_1u_{n-1} + c_2u_{n-2} + \ldots + c_ku_{n-k} + b_n \quad \text{(para n maior que o k-ésimo índice de}^{18}\ u\text{)}$$

com $c_k \neq 0$ e onde as expressões (denotadas por) $c_1, \ldots, c_k$ e b_n podem depender de n

(mas as expressões denotadas por $c_1, \ldots, c_k$ e b_n não podem envolver a sucessão u que estamos a definir por recorrência, i.e. não podem envolver termos genéricos da forma $u_{n\pm\ldots}$).

b) Uma *relação de recorrência linear de ordem* k (≥1) é formada por uma equação de recorrência linear de ordem k, juntamente com k condições iniciais que definem explicitamente o valor dos primeiros k termos de u.

∇

O termo linear advém de não existirem, na equação, potências de u diferentes de 1.

Como sabemos (dos resultados do capítulo anterior) uma relação de recorrência deste tipo admite uma e uma só solução. Mas a questão agora, aqui, é a de saber se existem métodos que se possam aplicar que permitam determinar a solução de qualquer relação deste tipo. Embora não existam tais métodos para todas as relações lineares, para uma sub-classe importante destas existem: a classe das relações de recorrência lineares, homogéneas e de coeficientes constantes.

<u>Definição 2:</u>

a) Uma equação/relação de recorrência linear de ordem k (≥1)

$$u_n = c_1u_{n-1} + c_2u_{n-2} + \ldots + c_ku_{n-k} + b_n$$

diz-se <u>homogénea</u> se $b_n = 0$

[18] Isto é, mais precisamente, para n≥q+k, supondo u uma sucessão$_q$ (ou q-sucessão), com q inteiro.

b) Uma equação/relação de recorrência linear de ordem k (≥1)

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} + b_n$$

diz-se <u>de coeficientes constantes</u> se as expressões (denotadas por) c_1, ..., c_k são constantes (não dependem de n).

∇

<u>Exemplo 1</u> (equações de recorrência lineares):

a) A equação de recorrência

$$u_n = 2u_{n-1}$$

é uma equação de recorrência linear e homogénea, de coeficientes constantes, de ordem (ou grau) 1

b) A sucessão dos números factoriais pode ser definida pela relação de recorrência

$$u_n = nu_{n-1}, \text{ para } n \geq 1$$

$$u_0 = 1$$

Esta equação de recorrência é da forma

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} + b_n$$

com k=1 (logo é de ordem 1), com b_n=0 (logo é homogénea) e com c_1=n (depende de n, logo não é constante). Trata-se, portanto, de uma relação de recorrência linear e homogénea, de ordem 1, mas cujos coeficientes não são constantes.

c) A equação de recorrência (com r≠0)

$$u_n = u_{n-1} + r, \text{ para } n \geq 1$$

(que define a progressão aritmética, de razão r, dada por $u_n = u_0 + nr$)

é uma equação de recorrência linear, de ordem 1, de coeficientes constantes, mas não homogénea (apesar de b_n ser constante, não é igual a 0).

d) A relação de recorrência (com r≠0)

$$u_n = ru_{n-1}, \text{ para } n \geq 1$$

$$u_0 = 1$$

(que define a progressão geométrica, de razão r, dada por $u_n = r^n$, para n≥0)

é uma relação de recorrência linear e homogénea, de ordem 1, e de coeficientes constantes.

e) A equação de recorrência das torres de Hanoi

$$t_n = 2\, t_{n-1} + 1, \text{ para } n \geq 1$$

é uma equação de recorrência linear, de ordem 1, de coeficientes constantes, mas não homogénea.

f) A equação de recorrência do problema das n ovais

$$r_n = r_{n-1} + 2(n-1), \text{ para (qualquer) } n \geq 2$$

é uma equação de recorrência linear, de ordem 1, de coeficientes constantes, mas não homogénea.

g) A equação de recorrência de Fibonnaci

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ para } n \geq 2$$

é uma equação de recorrência linear, de ordem 2, homogénea e de coeficientes constantes.

h) A equação de recorrência

$u_n = (n-1)u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}$, para n≥2

é uma equação de recorrência linear, de ordem 2, homogénea, mas de coeficientes não constantes.

i) A equação de recorrência

$u_n = (n-1)u_{n-1} + (n-1)u_{n-2} + (-1)^n$, para n≥2

é uma equação de recorrência linear, de ordem 2, não homogénea e de coeficientes não constantes.

j) Por sua vez, a equação de recorrência

$u_n = 3\ u_{n-1}\ u_{n-2}$, para n≥2

não é linear.

∇

Vejamos, então, *como resolver uma qualquer relação de recorrência linear e homogénea, de coeficientes constantes*, formada por uma equação da forma

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k}$$

com k≥1, $c_k \neq 0$ e c_1, ..., c_k constantes (expressões independentes de n), e sujeita a um conjunto de condições iniciais que explicitam o valor dos k primeiros termos de u.

Iremos no que se segue, para simplificar (e sem perca de generalidade[19]), assumir ainda que u é uma sucessão$_0$, isto é, que se trata de uma sucessão[20] indexada pelo conjunto dos naturais, pelo que a equação de recorrência é válida para qualquer n≥k.

A ideia[21] é procurar encontrar *soluções gerais*, *com uma certa forma,* da equação de recorrência

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k}\ \text{, para n≥k (e com } c_k \neq 0)$$

procurando em seguida obter *soluções específicas (dessa forma geral)* que satisfaçam as *condições iniciais*.

Concretizando esta ideia, comecemos por procurar soluções da equação de recorrência da forma

$$q^n\text{, com } q \neq 0$$

(onde, à partida, *q* pode ser um qualquer número, eventualmente complexo, desde que seja não nulo).

Ora, reescrevendo a equação de recorrência, de forma equivalente, como se segue:

$$u_n - c_1 u_{n-1} - c_2 u_{n-2} - \ldots - c_k u_{n-k} = 0\ \text{, para n≥k} \quad (*)$$

é imediato que $u_n = q^n$ é uma solução de (*) sse:

$$q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \ldots - c_k q^{n-k} = 0$$

---

[19] Pois dada uma sucessão$_q$ $(a_n)_{n\geq q}$ podemos sempre passar para uma sucessão$_0$ da forma $(u_n)_{n\geq o}$, definindo $u_n = a_{n+q}$ (para qualquer n≥0), resolver a relação de recorrência que assim se obtém para $(u_n)_{n\geq o}$, e a partir da expressão explícita obtida para o termo geral u_n calcular a expressão explícita do termo geral a_n (usando o facto de $a_n = u_{n-q}$, para qualquer n≥q).

[20] Recorde-se mais uma vez (ver observação 1 da secção 4 do capítulo 4) que podemos usar o termo sucessão, em sentido lato, para nos referirmos genericamente a uma qualquer família indexada pelo conjunto dos inteiros maiores ou iguais que um dado inteiro (qualquer). O termo sucessão$_q$ explicita que o conjunto dos índices é $\mathbb{Z}_q$ = {q, q+1, q+2, ...} (com q inteiro).

[21] O método usado é análogo ao método usado para resolver equações diferenciais lineares e homogéneas de coeficientes constantes, desempenhando aqui a função (de n) dada pela potência q^n o papel que é desempenhado pela função exponencial e^{qx}, na resolução das equações diferenciais.

E, como q≠0, tem-se que

$$q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \ldots - c_k q^{n-k} = 0 \Leftrightarrow q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \ldots - c_k q^{k-k}) = 0$$

$$\Leftrightarrow q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

Isto é, q^n, com $q \neq 0$, é uma solução da equação de recorrência sse q for uma raiz da equação

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

Assim, se existir uma solução q da equação anterior, tal que q^n satisfaz as condições iniciais, teremos encontrado uma solução da relação de recorrência (a única, pois já sabemos que as relações de recorrência admitem uma e uma só solução).

<u>Exemplo 2</u> (Aplicação do método para a resolução da recorrência de Fibonacci):

Aplicando o método anterior à sucessão de Fibonacci, reescreve-se a equação de recorrência

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (com n≥2)

como se segue:

$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$

e procura-se uma solução desta equação da forma q^n, com q≠0:

$$q^n - q^{n-1} - q^{n-2} = 0 \Leftrightarrow q^{n-2}(q^2 - q - 1) = 0 \Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0$$

Isto é, q^n (com $q \neq 0$) é uma solução da equação de recorrência de Fibonacci sse

$$q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Acontece que nenhuma expressão da forma $f_n = q^n$ poderá satisfazer as condições iniciais de Fibonacci, uma vez que $q^0 = 1 \neq 0 = f_0$, pelo que parece que por aqui não vamos lá !

∇

Como o exemplo anterior claramente ilustra, se nos restringirmos a soluções das equações de recorrência da forma q^n dificilmente encontraremos soluções que satisfaçam as condições iniciais (basta que exista, por exemplo, uma condição inicial com $u_0 \neq 1$). Temos assim de procurar encontrar formas mais gerais para as soluções da equação de recorrência, de modo a permitir que elas se possam ajustar mais facilmente às condições iniciais.

Ora, acontece que como estamos a considerar equações de recorrência lineares e homogéneas[22]

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k}$$

qualquer combinação linear de soluções desta equação ainda é uma sua solução, como se mostra a seguir.

Sejam $h_i(n)$, i=1,...,j, quaisquer j soluções da equação $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k}$, a_i, i=1,...,j, quaisquer j constantes e $u_n = a_1 h_1(n) + a_2 h_2(n) + \ldots + a_j h_j(n)$. Então:

[22] E de coeficientes constantes, mas esse aspecto não é relevante para o que se segue.

$$u_n = a_1 h_1(n) + \ldots + a_j h_j(n) = \qquad \text{(cada } h_i(n) \text{ é solução da equação)}$$
$$= a_1(c_1 h_1(n-1) + \ldots + c_k h_1(n-k)) + \ldots + a_j(c_1 h_j(n-1) + \ldots + c_k h_j(n-k))$$
$$= c_1(a_1 h_1(n-1) + \ldots + a_j h_j(n-1)) + \ldots + c_k(a_1 h_1(n-k) + \ldots + a_j h_j(n-k))$$
$$= c_1 u_{n-1} + \ldots + c_k u_{n-k}$$

Isto é, $u_n = a_1 h_1(n) + a_2 h_2(n) + \ldots + a_j h_j(n)$ é solução de $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k}$.

Assim, uma ideia que surge natural testar é considerar para solução geral da equação

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k}$$

qualquer expressão da forma

$$u_n = a_1 q_1^{\,n} + a_2 q_2^{\,n} + \ldots + a_k q_k^{\,n}$$

com $q_1, \ldots, q_k$ as k raízes (eventualmente complexas), não necessariamente distintas, da equação[23]

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

e a seguir procurar determinar os valores de $a_1, \ldots, a_k$ que permitem que esta solução satisfaça as condições iniciais.

Resta saber se será sempre possível encontrar valores de $a_1, \ldots, a_k$ que permitam que esta solução genérica da equação de recorrência se ajuste às condições iniciais ?

Vejamos o que se passa a este respeito no caso particular (mais simples) das relações de recorrência (deste tipo) de ordem 2. Mais concretamente, queremos determinar se será sempre possível encontrar a_1 e a_2 tais que $u_n = a_1 q_1^{\,n} + a_2 q_2^{\,n}$ (para n≥0) satisfaça quaisquer duas condições iniciais da forma

- $u_0 = b_0$
- $u_1 = b_1$

Ora estas condições iniciais conduzem-nos ao sistema formado pelas duas equações seguintes (em que as nossas incógnitas são a_1 e a_2):

- $a_1 + a_2 = b_0$
- $a_1 q_1 + a_2 q_2 = b_1$

Resolvendo este sistema chega-se a:

$$a_1 q_1 + a_2 q_1 = b_0 q_1$$
$$a_1 q_1 + a_2 q_2 = b_1$$

e subtraindo, obtém-se

- $a_1 = b_0 - a_2$
- $a_2 = \dfrac{b_0 q_1 - b_1}{q_1 - q_2}$

pelo que se as duas raízes da equação q_1 e q_2 forem distintas, temos sempre solução. Caso $q_1 = q_2 = q$, é imediato que só teremos solução para o sistema se os valores iniciais satisfizerem $b_0 = \dfrac{b_1}{q}$.

[23] Saliente-se que qualquer raiz desta equação polinomial é não nula, uma vez que $c_k \neq 0$.

Vejamos o que se passa agora no caso geral.

Será que, no caso geral, se as k raízes (eventualmente complexas) da equação

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

$q_1, \ldots, q_k$, forem todas distintas, existirão sempre valores $a_1, \ldots, a_k$ tais que

$$u_n = a_1 q_1^{\,n} + a_2 q_2^{\,n} + \ldots + a_k q_k^{\,n}$$

satisfaça quaisquer k condições iniciais ?

Sejam

- $u_0 = b_0$
- $u_1 = b_1$

  …
- $u_{k-1} = b_{k-1}$

as k condições iniciais.

Então, o sistema de equações a resolver (em ordem a $a_1, \ldots, a_k$) é formado pelas seguintes equações:

- $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = b_0$
- $a_1 q_1 + a_2 q_2 + \ldots + a_k q_k = b_1$
- $a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + \ldots + a_k q_k^2 = b_2$

  …
- $a_1 q_1^{k-1} + a_2 q_2^{k-1} + \ldots + a_k q_k^{k-1} = b_{k-1}$

Recorrendo a conhecimentos de Álgebra Linear, tem-se que a matriz dos coeficientes deste sistema de equações é

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \ldots & q_k^{k-1} \end{matrix}$$

e esta matriz, que é uma importante matriz conhecida por *matriz Vandermonde*, é invertível sse $q_1, \ldots, q_k$ forem todos distintos. De facto, pode provar-se que o seu determinante é igual a

$$\prod_{1 \le i < j \le k} (q_i - q_j)$$

pelo que é não zero exactamente quando $q_1, \ldots, q_k$ são todos distintos. Assim, nesse caso, o sistema de equações em causa é sempre solúvel.

Estamos assim em condições de enunciar o nosso primeiro resultado sobre a solução deste tipo de relações de recorrência.

<u>Teorema 1</u> (resolução de relações de recorrência lineares, homogéneas e de coeficientes constantes):

a) Seja $q \neq 0$. Então $u_n = q^n$ é uma solução de uma equação de recorrência linear, de ordem k, homogénea e com coeficientes constantes:

$$(*) \qquad u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} \quad (\text{com } c_k \neq 0 \text{ e } n \geq k)$$

sse q é uma raiz da equação polinomial

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

b) Se a equação polinomial anterior tiver k raízes distintas, $q_1, \ldots, q_k$, então

$$(**) \quad u_n = a_1 q_1^{\,n} + a_2 q_2^{\,n} + \ldots + a_k q_k^{\,n}$$

é uma solução geral da equação (*), no seguinte sentido:

Quaisquer que sejam as constantes $a_1, \ldots, a_k$, (**) satisfaz a equação de recorrência (*), e existem constantes $a_1, \ldots, a_k$ tais que (**) é a única sucessão que satisfaz simultaneamente a equação de recorrência (*) e as k condições iniciais.

∇

Terminologia:

Dada uma equação de recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} \text{ , para } n \geq k \text{ (e com } c_k \neq 0)$$

dizemos que a equação polinomial

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

é a *equação característica* da recorrência, e que as suas (k) raízes são as respectivas *raízes características*.

∇

Corolário 1 (caso particular das relações de recorrência de ordem 1)

A solução de uma relação de recorrência da forma (com $c \neq 0$)

- equação de recorrência: $u_n = c u_{n-1}$, para $n \geq 1$
- condição inicial: $u_0 = b$

é dada por [24] $u_n = b c^n$, para $n \geq 0$

∇

Corolário 2 (caso particular das relações de recorrência de ordem 2)

Considere-se a relação de recorrência linear, de ordem 2, homogénea e com coeficientes constantes:

- equação de recorrência: $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2}$, para $n \geq 2$ (com $c_2 \neq 0$)
- condições iniciais: $u_0 = b_0$ e $u_1 = b_1$

Se a equação característica

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0$$

admite duas raízes distintas, q_1 e q_2, então existem constantes a_1 e a_2 tais que

$$u_n = a_1 q_1^{\,n} + a_2 q_2^{\,n}$$

é a única solução da relação de recorrência, sendo o valor de a_1 e a_2 obtidos resolvendo o sistema formado pelas duas equações seguintes:

- $a_1 + a_2 = b_0$

[24] A demonstração deste resultado é imediata quer usando o resultado anterior, quer usando o método iterativo.

- $a_1 q_1 + a_2 q_2 = b_1$

∇

Exemplo 3 (resolução da recorrência de Fibonacci – conclusão):

Relação de recorrência de Fibonacci:

- condições iniciais

  $f_0 = 0$

  $f_1 = 1$

- equação de recorrência

  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 2$

Resolvendo a equação característica da recorrência (uma equação do 2º grau):

$$x^2 - x - 1 = 0$$

obtém-se como raízes $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(isto é, *a razão de ouro* [25] – "*the golden ratio* - $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e o seu conjugado $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

Assim, quaisquer que sejam as constantes a_1 e a_2:

$$a_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + a_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \text{ para } n \geq 0$$

é uma solução da equação de recorrência de Fibonacci.

Os valores de a_1 e a_2 que satisfazem as condições iniciais são obtidos resolvendo o sistema formado pelas duas equações seguintes:

- $a_1 + a_2 = 0$
- $a_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + a_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$

Feitas as contas, chega-se a que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \text{ para } n \geq 0$$

é a única sucessão que satisfaz a relação de recorrência de Fibonacci (i.e. que satisfaz simultaneamente as respectivas equação de recorrência e condições iniciais).

Repare-se que embora a expressão do termo geral da sucessão de Fibonacci envolva o número irracional $\sqrt{5}$, no cálculo dos sucessivos termos todos as ocorrências de $\sqrt{5}$ "espantosamente" se cancelam (uma vez que é imediato que a sucessão definida pela relação de recorrência em causa é formada só por naturais).

Refira-se ainda que como $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, temos $\frac{1}{\sqrt{5}}\left|(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right| < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, podendo concluir-se que o valor de f_n é igual a $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ arredondado para o inteiro mais próximo.

∇

[25] O chamado *número de ouro* é o valor dessa razão, um número irracional, aproximadamente igual a 1,618.

Vejamos dois novos exemplos de aplicação deste resultado.

Exemplo 4:

Suponha-se que a população de uma dada espécie animal, numa determinada localidade, era de 200 num certo instante, que designaremos pelo instante inicial n=0, e que no instante de tempo n=1 (o instante em que foi realizada a contagem seguinte) a população em causa era formada por 220 animais. Suponha-se ainda que se verificou que o crescimento da população ocorrido entre o instante (de contagem) n-1 e o instante n é duas vezes o crescimento ocorrido entre os instantes n-2 e n-1 (podemos supor que os sucessivos instantes de contagem estão igualmente espaçados ao longo do tempo). Qual o tamanho da população em causa no instante 50 ?

Designando por p_n o número de elementos da população em causa no instante n (com n≥0), é imediato que p_n satisfaz a seguinte relação de recorrência:

- condições iniciais

  $p_0 = 200$

  $p_1 = 220$

- equação de recorrência

  $p_n - p_{n-1} = 2(p_{n-1} - p_{n-2})$

  i.e.

  $p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}$, para $n \geq 2$

Trata-se de uma relação de recorrência linear, de ordem 2, homogénea e com coeficientes constantes.

Resolvendo a equação característica

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

obtém-se como raízes

$$x = 2 \quad \text{e} \quad x = 1$$

Assim, quaisquer que sejam as constantes a_1 e a_2:

$$p_n = a_1 2^n + a_2 1^n = a_1 2^n + a_2 \text{, para } n \geq 0$$

é uma solução da equação de recorrência e (como as duas raízes características são distintas) sabemos que podemos sempre determinar os valores de a_1 e a_2 que satisfazem as condições iniciais, bastando para isso resolver o sistema formado pelas duas equações seguintes:

- $a_1 + a_2 = 200$
- $2a_1 + a_2 = 220$

Feitas as contas, chega-se a que

$$p_n = 20 \times 2^n + 180 = 5 \times 2^{n+2} + 180 \text{, para } n \geq 0$$

(a população em causa cresce exponencialmente).

No instante 50 ter-se-á $p_{50} = 5 \times 2^{52} + 180$ animais dessa espécie.

∇

Exemplo 5:

Palavras de comprimento n (≥ 0), usando apenas as letras "a", "b" e "c", podem ser transmitidas através de um canal de comunicação, sujeitas à seguinte restrição "nenhuma palavra em que dois a's ocorram consecutivamente pode ser transmitida nesse canal". Pretende-se saber qual o número de palavras de comprimento n que podem ser transmitidas nesse canal.

Designe-se por p_n o número de palavras de comprimento n que podem ser transmitidas no canal.

É imediato que:

- $p_0 = 1$ (estamos a admitir que pode ser transmitida a palavra vazia)
- $p_1 = 3$ (palavras *a*, *b* e *c*)

Calculemos ainda p_2 de modo a ganharmos alguma experiência com o problema. As palavras de comprimento 2 que podem ser transmitidas são: (*aa* não pode) *ab*, *ac*, *ba*, *bb*, *bc*, *ca*, *cb* e *cc*. Logo:

- $p_2 = 8$

Procuremos então definir a equação de recorrência que p_n satisfaz. Pensemos numa palavra $w=l_1 \ldots l_n$ de comprimento n satisfazendo a restrição (logo se verá se devemos considerar $n \geq 1$, ou se a equação de recorrência só será válido para valores superiores de n).

A primeira letra (l_1) de w ou é "a", ou é diferente de "a".

No último caso, $w=l_1 \ldots l_n$ satisfaz a restrição sse $l_2 \ldots l_n$ satisfaz. Como há duas letras diferentes de "a", temos neste caso $2p_{n-1}$ palavras.

No caso em que l_1="a", (se n>1 então) l_2 tem de ser diferente de "a": ou l_2="b", ou l_2= "c". E, tal como no caso anterior) $l_2 \ldots l_n$ satisfaz a restrição sse $l_3 \ldots l_n$ satisfaz. Logo, no caso em que l_1="a", temos $2p_{n-2}$ palavras. Obtém-se assim:

- equação de recorrência

  $p_n = 2\, p_{n-1} + 2\, p_{n-2}$, para $n \geq 2$

Trata-se de uma relação de recorrência linear, de ordem 2, homogénea e com coeficientes constantes.

Resolvendo a equação característica

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

obtém-se como raízes $x = 1+\sqrt{3}$ e $x = 1-\sqrt{3}$.

Assim, quaisquer que sejam as constantes a_1 e a_2,

$$p_n = a_1(1+\sqrt{3})^n + a_2(1-\sqrt{3})^n, \text{ para } n \geq 0$$

é uma solução da equação de recorrência e (como as duas raízes características são distintas) sabemos que podemos sempre determinar os valores de a_1 e a_2 que satisfazem as condições iniciais, bastando para isso resolver o sistema formado pelas duas equações seguintes:

- $a_1 + a_2 = 0$
- $a_1(1+\sqrt{3}) + a_2(1-\sqrt{3}) = 3$

Feitas as contas, chega-se a que

$$p_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n, \text{ para } n \geq 0$$

(Verfique que $p_2 = 8$).

∇

Resta-nos ver o que fazer quando as k raízes características não são todas distintas.

Suponha-se que a equação característica

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

de uma equação de recorrência linear, de ordem k, homogénea e com coeficientes constantes

$$(*) \qquad u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} \quad (\text{com } c_k \neq 0 \text{ e } n \geq k)$$

admite uma raiz q de multiplicidade s (>1).

Então pode provar-se que não só $u_n = q^n$ é uma solução de (*), como já sabíamos, como são igualmente soluções de (*):

$$u_n = nq^n \ , \ u_n = n^2 q^n \ , \ldots , \ u_n = n^{s-1} q^n$$

e, na pesquisa da solução geral da relação de recorrência, estas s soluções de (*) vão desempenhar o mesmo papel que é desempenhado pelas soluções de (*) da forma

$$q_1^n, \ldots, q_s^n$$

quando as raízes $q_1, \ldots, q_s$ são distintas.

Em seguida enunciaremos de forma precisa este procedimento, demonstrando a sua adequação apenas para o caso das recorrências de ordem 2.

<u>Teorema 2</u> (caso particular das relações de recorrência de ordem 2)

Considere-se a relação de recorrência linear, de ordem 2, homogénea e com coeficientes constantes:

- equação de recorrência: $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2}$, para n≥2 (com $c_2 \neq 0$)
- condições iniciais: $u_0 = b_0$ e $u_1 = b_1$

Se a equação característica

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0$$

tem uma raiz dupla q (isto é, existe uma única raiz da equação de multiplicidade 2), então existem constantes a_1 e a_2 tais que

$$u_n = a_1 q^n + a_2 n q^n$$

é a única solução da relação de recorrência, sendo o valor de a_1 e a_2 obtidos resolvendo o sistema formado pelas duas equações seguintes:

- $a_1 = b_0$
- $a_1 q + a_2 q = b_1$

<u>Demonstração</u>:

i) Como vimos atrás $u_n = q^n$ (n≥0) é solução da equação de recorrência $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2}$ (n≥2).

ii) Que $u_n = nq^n$ também é solução da mesma equação pode mostrar-se como se segue:

Como q é a única raiz de $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$, tem-se[26]:

$$x^2 - c_1 x - c_2 = (x - q)^2$$

[26] Recorde que se r_1 e r_2 são as duas raízes de uma equação $ax^2+bx+c=0$ então $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$.

i.e.

$$x^2 - c_1x - c_2 = x^2 - 2qx + q^2$$

pelo que $c_2 = -q^2$ e $c_1 = 2q$.

Mas então:

$$c_1((n-1)q^{n-1}) + c_2((n-2)q^{n-2}) = 2q(n-1)q^{n-1} - q^2(n-2)q^{n-2} =$$

$$= 2(n-1)q^n - (n-2)q^n = (2(n-1)-(n-2))q^n = nq^n$$

Logo $u_n = nq^n$ é solução da equação de recorrência.

iii) Como vimos, qualquer combinação linear de soluções da equação de recorrência ainda é uma solução dessa equação. Logo quaisquer que sejam as constantes a_1 e a_2,

$$u_n = a_1q^n + a_2nq^n$$

é solução da equação de recorrência.

iv) Resta-nos verificar se existem constantes a_1 e a_2 para as quais a solução geral anterior satisfaça as condições iniciais. Para que tal aconteça, tem de verificar-se:

- $u_0 = b_0$, isto é, $a_1 = b_0$
- $u_1 = b_1$, isto é, $a_1q + a_2q = b_1$

e este sistema é sempre solúvel, obtendo-se como soluções

- $a_1 = b_0$
- $a_2 = \dfrac{b_1 - b_0q}{q} = \dfrac{b_1}{q} - b_0$

(note-se que q é diferente de zero, pois q é raiz de $x^2 - c_1x - c_2 = 0$ e $c_2 \neq 0$).

∇

O caso geral (para qualquer ordem[27] k ≥2) é a seguir enunciado, sem demonstração.

<u>Teorema 2 – caso geral</u>:

Considere-se uma equação de recorrência linear, de ordem k(≥2), homogénea e com coeficientes constantes:

$$(*) \quad u_n = c_1u_{n-1} + c_2u_{n-2} + \ldots + c_ku_{n-k} \quad (\text{com } c_k \neq 0 \text{ e } n \geq k)$$

Suponha-se que a sua equação característica

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

tem como raízes distintas, $q_1, \ldots, q_j$, e que a multiplicidade de q_i (i=1,...,j) é s_i (≥1). (Nota: terá de ter-se $s_1+s_2+\ldots+s_j = k$). Então (onde no que se segue os termos da forma $a_{i_r}n^{r-1}q_i^n$ só ocorrem para r>1)

$$(**) \quad u_n = a_{1_1}q_1^n + a_{1_2}n^{2-1}q_1^n + \ldots + a_{1_{s_1}}n^{s_1-1}q_1^n + \ldots + a_{j_1}q_j^n + a_{j_2}n^{2-1}q_j^n + \ldots + a_{1_{s_j}}n^{s_j-1}q_j^n$$

é uma solução geral da equação (*), no seguinte sentido:

---

[27] As relações de recorrência lineares e homogéneas, de coeficientes constantes de ordem k=1 não caem (obviamente) no âmbito deste resultado, tendo sido abordadas completamente no corolário 1 atrás.

Quaisquer que sejam as constantes a_1, ..., a_k, (**) satisfaz a equação de recorrência (*), e existem constantes a_1, ..., a_k tais que (**) é a única sucessão que satisfaz simultaneamente a equação de recorrência (*) e as k condições iniciais.

∇

Exemplo 6:

Pretende-se resolver a seguinte relação de recorrência:

- equação de recorrência: $p_n = 4(p_{n-1} - p_{n-2})$, para n≥2
- condições iniciais: $p_0 = 1$ e $p_1 = 1$

Trata-se de uma relação de recorrência linear, de ordem 2, homogénea e com coeficientes constantes, pois a equação de recorrência pode ser reescrita na forma:

$p_n = 4p_{n-1} - 4p_{n-2}$, para n≥2

Resolvendo a equação característica

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

obtém-se a seguinte raiz dupla

$$x = 2$$

Assim, quaisquer que sejam as constantes a_1 e a_2,

$$p_n = a_1 2^n + a_2 n 2^n \text{, para } n \geq 0$$

é uma solução da equação de recorrência e sabemos que podemos sempre determinar os valores de a_1 e a_2 que satisfazem as condições iniciais, bastando para isso resolver o sistema formado pelas duas equações seguintes:

- ($p_0 = 1 \Leftrightarrow$) $a_1 = 1$
- ($p_1 = 1 \Leftrightarrow$) $a_1 2 + a_2 2 = 1$

Logo, $p_n = 2^n - \frac{1}{2} n 2^n$, para n≥0

∇

Refira-se ainda, antes de passar à análise de outros tipos de relações de recorrência lineares, que, por vezes, é possível converter uma relação de recorrência, que não é uma relação de recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes, numa relação de recorrência desse tipo, através de uma substituição apropriada. O exemplo (complementar) 4 da secção anterior já ilustrou um caso desses. Os últimos dois exercícios a seguir constituem outras ilustrações de casos em que tal é possível.

Exercícios:

1. Considere a sucessão$_0$ de números de Fibonacci, definida pela relação de recorrência
   - condições iniciais

     $f_0 = 0$

     $f_1 = 1$
   - equação de recorrência

     $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para n≥2

Como se referiu, esta sucessão de números tem algumas propriedades muito interessantes. Seguem-se alguns exemplos.

a) Prove (por indução) que as somas parciais dos termos da sucessão de Fibonacci satisfazem a seguinte propriedade:

$S_n = f_0 + f_1 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$, para qualquer n≥0

b) Prove (por indução) que:

$f_0^2 + f_1^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ para qualquer n≥0

c) Prove (por indução) que:

$f_n^2 = f_{n-1} f_{n+1} + (-1)^{n+1}$ para qualquer n≥1

c) Prove (por indução) que:

$f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2 = f_n f_{n+3}$ para qualquer n≥1

2. Resolva a seguinte relação de recorrência:
   - equação de recorrência: $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$, para n≥2
   - condições iniciais: $u_0 = 7$ e $u_1 = 16$
3. Suponha que a evolução da população de uma determinada espécie se comporta como se segue: no instante inicial (n=0) é de 200 e no instante de contagem seguinte (n=1) é de 800; em cada instante de contagem (n) a população existente é igual a 8 vezes a que existia no instante anterior (n-1), menos 16 vezes a que existia no instante anterior a esse (n-2).

   Designando por p_n (o número de elementos d)a população existente no instante n, encontre uma expressão explícita para o valor de p_n (como função de n).
4. Resolva as seguintes recorrências:

   a) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_n = 6\ a_{n-1} - 8\ a_{n-2}$, para n≥2

   b) $a_0 = 2$, $a_1 = -20$ e $a_n = -8\ a_{n-1} - 16\ a_{n-2}$, para n≥2

   c) $a_0 = 4$, $a_1 = 0$ e $a_n = 2\ a_{n-1} + 8\ a_{n-2}$, para n≥2

   d) $a_0 = 5$, $a_1 = 16$ e $a_n = 7\ a_{n-1} - 10\ a_{n-2}$, para n≥2

   e) $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ e $a_n = 2\ a_{n-1} - a_{n-2}$, para n≥2

   f) $a_0 = 20$, $a_1 = 30$, $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ (para n≥2)
5. Resolva as seguintes recorrências:

   a) $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ e $u_n = u_{n-1} + 6\ u_{n-2}$, para n≥2

   b) $u_0 = 2$, $u_1 = 6$ e $u_n = 8\ u_{n-1} - 16\ u_{n-2}$, para n≥2

   c) $u_0 = 4$, $u_1 = 8$ e $u_n = u_{n-1} + 2\ u_{n-2}$, para n≥2
6. Num certo local a população de uma determinada espécie é contada no fim de cada ano, desde há 10 anos. Designando por p_n o número de elementos da espécie aquando da (n+1)-ésima contagem, sabe-se que $p_0 = 200$ (isto é, há 10 anos havia 200 elementos da espécie em questão) e $p_1 = 400$, e verificou-se que no fim de cada ano o número de elementos da espécie em questão era igual ao quádruplo do crescimento que essa população teve no ano anterior (ao que acabou de findar). A manter-se esta relação no futuro, qual a população da espécie daqui a 20 anos ?
7. Resolva a seguinte relação de recorrência:

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$ e $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$, para n≥2

(Sugestão: comece por transformar esta relação de recorrência numa relação de recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes, efectuando a substituição $b_n = \sqrt{a_n}$, para n≥0; em seguida, resolva a relação de recorrência que define $(b_n)_{n\geq 0}$; e, a partir daí, obtenha a expressão do termo geral a_n).

8. Resolva a seguinte relação de recorrência:

$a_0 = 8$, $a_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e $\sqrt{a_n} = \sqrt{\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}}$, para n≥2

(Sugestão: transforme esta relação de recorrência numa relação de recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes, aplicando logaritmos a ambos os membros da equação de recorrência e efectuando a substituição $b_n = \log_2 a_n$, para n≥0).

∇

Secção 4: Recorrências lineares, de coeficientes constantes, não homogéneas.

As equações lineares que são de coeficientes constantes, mas não homogéneas, i.e. que têm a forma

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} + b_n \text{ , para } n\geq k$$

com $c_1, \ldots, c_k$ constantes (independentes de n), $c_k \neq 0$ e $b_n \neq 0$ (eventuamente dependente de n)

são mais difíceis de resolver, e requerem técnicas especiais, dependentes da parte não homogénea da equação (i.e. do termo b_n).

A base da técnica que ilustraremos para resolver este tipo de recorrências fundamenta-se no seguinte resultado.

Teorema:

Considere-se uma equação de recorrência de ordem k, linear e de coeficientes constantes, não homogénea

$$(*) \qquad u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} + b_n \text{ , para } n\geq k$$

e chame-se à equação

$$(**) \qquad u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} \text{ , para } n\geq k$$

de *equação homogénea associada*.

Se

- a sucessão$_0$ f(n) (i.e., usando a notação usual das sucessões, $(f_n)_{n\geq 0}$) é uma solução da equação homogénea associada (**)
- e se a sucessão$_0$ g(n), (i.e., usando a notação usual das sucessões, $(g_n)_{n\geq 0}$) é uma solução da equação não homogénea (*)

então f(n)+g(n) (com n≥0) constitui ainda uma solução da equação não homogénea (*).

Demonstração:

Seja u_n = f(n)+g(n), para n≥0. Então:

$u_n = f(n) + g(n) =$ (f(n) é solução de (**) e g(n) é solução de (*))

$c_1 f(n-1) + \ldots + c_k f(n-k) + c_1 g(n-1) + \ldots + c_k g(n-k) + b_n =$

$c_1(f(n-1) + g(n-1)) + \ldots + c_k(f(n-k) + g(n-k)) + b_n =$

$c_1 u_{n-1} + ... + c_k u_{n-k} + b_n$ (c.q.d.)

∇

Tendo por base este resultado, podemos sumarizar a técnica que usaremos em seguida para resolver algumas recorrência lineares, de coeficientes constantes mas não homogéneas, como se segue:

Técnica para resolver relações de recorrência lineares, de coeficientes constantes mas não homogéneas:

Para resolver uma equação de recorrência de ordem k, linear e de coeficientes constantes, não homogénea

(*) $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + ... + c_k u_{n-k} + b_n$, para n≥k

juntamente com k condições iniciais (definindo o valor dos termos u_0, ..., u_{k-1}), pode proceder-se como se segue:

(1) Encontrar a solução geral (a seguir designada de f(n)) da equação homogénea associada

(**) $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + ... + c_k u_{n-k}$, para n≥k

(2) Encontrar uma solução específica (a seguir designada de g(n)) da equação não homogénea

(*) $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + ... + c_k u_{n-k} + b_n$, para n≥k

(3) Combinar a solução geral com a solução específica

(i.e. considerar a solução da equação de recorrência não homogénea da forma f(n)+g(n))

e determinar os valores das constantes que ocorrem na solução geral de modo a que a solução combinada satisfaça as condições iniciais.

∇

A principal dificuldade na aplicação desta técnica (para além da eventual dificuldade de descobrir as raízes da equação característica da equação homogénea associada [28]) reside na descoberta de uma solução particular no passo 2.

Para termos não homogéneos b_n de certas formas, existem certos tipos de soluções particulares que se pode tentar (o que não significa que funcionem sempre: tal depende da equação polinomial característica). Nomeadamente:

a) Se b_n é um polinómio de grau z, procurar encontrar uma solução particular g(n) que também seja um polinómio de grau z. Por exemplo:
   - i)• Se $b_n = r$ (uma constante), tentar g(n) = d (uma constante)
   - ii)• Se $b_n = r\,n + s$ (com s eventualmente igual a 0), tentar g(n) = d n + e
   - iii)• Se $b_n = r\,n^2 + s\,n + t$ (com s e t eventualmente iguais a 0), tentar $g(n) = d\,n^2 + e\,n + f$

b) Se b_n é uma exponencial, procurar encontrar uma solução particular g(n) que também seja uma exponencial:
   - Se $b_n = r^n$, tentar $g(n) = p\,r^n$,

Vejamos alguns exemplos de ilustração desta técnica, começando por uma recorrência linear não homogénea, de ordem 1, do tipo a)-ii). Refira-se que embora tais recorrências lineares não homogéneas, de

[28] Nomeadamente para ordens superiores ou iguais a 5, para as quais não existem fórmulas resolventes gerais.

ordem 1, tenham a forma adequada à aplicação do método iterativo para a sua solução, este método (como já vimos) conduz-nos em geral a somatórios, que nem sempre sabemos resolver (no sentido de que nem sempre sabemos encontrar uma fórmula explícita para tais somatórios).

Exemplo 1:

Pretende-se resolver a relação de recorrência linear, não homogénea, de ordem 1 e coeficientes constantes, dada por:

- condição inicial: $u_0 = 2$
- equação de recorrência: $u_n = 3\ u_{n-1} - 4\ n$, para $n \geq 1$

(1) Comece-se por encontrar a solução geral da equação homogénea associada

$u_n = 3\ u_{n-1}$, para $n \geq 1$

A equação polinomial característica é x-3=0, pelo que a solução geral é

$$f(n) = a3^n, \text{ com } n \geq 0$$

(2) Procure-se uma solução particular da equação não homogénea $u_n = 3\ u_{n-1} - 4\ n$

De acordo com a sugestão acima, iremos tentar uma solução da forma $g(n) = d\ n + e$ (com $n \geq 0$), para apropriadas constantes *d* e *e*.

Para uma sucessão g(n), com essa forma, ser uma solução da equação $u_n = 3\ u_{n-1} - 4\ n$, tem de ter-se:

$g(n) = 3\ g(n-1) - 4n \Leftrightarrow d\ n + e = 3(d(n-1) + e) - 4n \Leftrightarrow d\ n + e = (3d - 4)\ n + (-3d + 3e)$

e, igualando os coeficientes de n e os termos constantes de ambos os membros da última equação, obtém-se:

$d = 3d - 4 \qquad (\Leftrightarrow 2d = 4)$

$e = -3d + 3e \qquad (\Leftrightarrow 2e = 3d)$

isto é, d = 2 e e = 3.

Logo

$$g(n) = 2\ n + 3$$

é uma solução particular da equação não homogénea.

(3) Combinamos agora a solução geral com a solução específica

$$u_n = a3^n + 2\ n + 3$$

e procuramos determinar o valor da constante *a* que satisfaça a condição inicial:

$u_0 = 2 \Leftrightarrow a3^0 + 2*0 + 3 = 2 \Leftrightarrow a = -1$

Logo

$$u_n = -3^n + 2\ n + 3, \text{ com } n \geq 0$$

é a solução procurada para a nossa recorrência linear inicial, não homogénea.

∇

Exemplo 2:

Pretende-se resolver a seguinte relação de recorrência linear, não homogénea, de ordem 1 e coeficientes constantes:

- condição inicial: $u_0 = 2$
- equação de recorrência: $u_n = 2\ u_{n-1} + 3^n$, para $n \geq 1$

(1) Comece-se por encontrar a solução geral da equação homogénea associada

$u_n = 2\ u_{n-1}$, para $n \geq 1$

A equação polinomial característica é x-2=0, pelo que a solução geral é

$$f(n) = a2^n, \text{ com } n \geq 0$$

(2) Procure-se uma solução particular da equação não homogénea $u_n = 2\ u_{n-1} + 3^n$,

De acordo com a sugestão acima, iremos tentar uma solução da forma $g(n) = p\ 3^n$ (com $n \geq 0$), para uma apropriada constante p.

Para uma sucessão g(n), com essa forma, ser uma solução da equação $u_n = 2\ u_{n-1} + 3^n$, tem de ter-se:

$g(n) = 2\ g(n-1) + 3^n \Leftrightarrow p\ 3^n = 2\ p\ 3^{n-1} + 3^n \Leftrightarrow 3\ p = 2\ p + 3 \Leftrightarrow p = 3$

Logo

$$g(n) = 3^{n+1}$$

é uma solução particular da equação não homogénea.

(3) Combinamos agora a solução geral com a solução específica

$$u_n = a2^n + 3^{n+1}$$

e procuramos determinar o valor da constante *a* que satisfaça a condição inicial:

$u_0 = 2 \Leftrightarrow a2^0 + 3^{0+1} = 2 \Leftrightarrow a + 3 = 2 \Leftrightarrow a = -1$

Logo

$$u_n = -2^n + 3^{n+1}, \text{ com } n \geq 0$$

é a solução procurada para a nossa recorrência linear não homogénea.

∇

Vejamos mais um exemplo, ainda com relações de ordem 1 [29].

<u>Exemplo 3</u>:

Pretende-se resolver a seguinte relação de recorrência linear, não homogénea, de ordem 1 e coeficientes constantes:

- condição inicial: $u_0 = 2$
- equação de recorrência: $u_n = 3\ u_{n-1} + 3^n$, para $n \geq 1$

(1) Comece-se por encontrar a solução geral da equação homogénea associada

$u_n = 3\ u_{n-1}$, para $n \geq 1$

A equação polinomial característica é x-3=0, pelo que a solução geral é

$$f(n) = a3^n, \text{ com } n \geq 0$$

(2) Procure-se uma solução particular da equação não homogénea $u_n = 3\ u_{n-1} + 3^n$,

De acordo com a sugestão acima, iremos tentar uma solução da forma $g(n) = p\ 3^n$ (com $n \geq 0$), para uma apropriada constante p.

Para uma sucessão g(n), com essa forma, ser uma solução da equação $u_n = 3\ u_{n-1} + 3^n$, tem de ter-se:

$g(n) = 3\ g(n-1) + 3^n \Leftrightarrow p\ 3^n = 3\ p\ 3^{n-1} + 3^n \Leftrightarrow p = p + 1$

---

[29] Tirado (tal como os dois exemplos anteriores) do livro [6], que temos estado a seguir até aqui, nesta secção. Refira-se ainda que aí se salienta (na pág. 217/218) que o método que temos estado a seguir falha em geral no caso em que a nossa equação de ordem 1 é da forma $u_n = c_1 u_{n-1} + b_n$ com $c_1 = 1$.

equação impossível de resolver.

Podemos então tentar encontrar uma solução particular da forma [30] $g(n) = p\ n\ 3^n$ (com $n \geq 0$):

$g(n) = 3\ g(n-1) + 3^n \Leftrightarrow p\ n\ 3^n = 3\ p\ (n-1)\ 3^{n-1} + 3^n \Leftrightarrow p\ n = p\ (n-1) + 1 \Leftrightarrow p = 1$

Logo

$$g(n) = n\ 3^n$$

é uma solução particular da equação não homogénea.

(3) Combinamos agora a solução geral com a solução específica

$$u_n = a\ 3^n + n\ 3^n$$

e procuramos determinar o valor da constante *a* que satisfaça a condição inicial:

$u_0 = 2 \Leftrightarrow a\ 3^0 + 0*3^0 = 2 \Leftrightarrow a = 2$

Logo

$$u_n = 2\ 3^n + n\ 3^n = (2 + n)\ 3^n, \text{ com } n \geq 0$$

é a solução procurada para a nossa recorrência linear não homogénea.

∇

Vejamos agora exemplos envolvendo relações lineares de ordem 2, de coeficientes constantes, mas não homogéneas.

<u>Exemplo 4</u>:

Pretende-se resolver a seguinte recorrência linear, não homogénea, de ordem 2 e coeficientes constantes:

- condição inicial: $u_0 = 130$ e $u_1 = 125$
- equação de recorrência: $u_n = 4\ u_{n-1} - 4\ u_{n-2} + 5\ n^2$, para $n \geq 2$

(1) Comece-se por encontrar a solução geral da equação homogénea associada

$u_n = 4\ u_{n-1} - 4\ u_{n-2}$, para $n \geq 2$

A equação polinomial característica é $x^2 - 4\ x + 4 = 0$, que tem 2 como raiz dupla, pelo que a solução geral é

$$f(n) = a\ 2^n + b\ n\ 2^n, \text{ com } n \geq 0$$

(2) Procure-se uma solução particular da equação não homogénea $u_n = 4\ u_{n-1} - 4\ u_{n-2} + 5\ n^2$.

De acordo com a sugestão acima, iremos tentar uma solução da forma $g(n) = d\ n^2 + e\ n + f$ (para $n \geq 0$), para apropriadas constantes *d, e* e *f*.

Para uma sucessão g(n), com essa forma, ser uma solução da equação $u_n = 4\ u_{n-1} - 4\ u_{n-2} + 5\ n^2$, tem de ter-se:

$g(n) = 4\ g(n-1) - 4\ g(n-2) + 5\ n^2 \Leftrightarrow$

$d\ n^2 + e\ n + f = 4\ (d\ (n-1)^2 + e\ (n-1) + f) - 4\ (d\ (n-2)^2 + e\ (n-2) + f) + 5\ n^2 \Leftrightarrow$

$d\ n^2 + e\ n + f = 5\ n^2 + 8\ d\ n - 12\ d + 4\ e$

e, igualando os coeficientes de n^2 e de n, e os termos constantes, de ambos os membros da última equação, obtém-se:

$d = 5$, $b = 40$ e $e = 100$

---

[30] Tal como sugere o livro (já referido na última nota de rodapé) [6].

Logo

$$g(n) = 5\ n^2 + 40\ n + 100$$

é uma solução particular da equação não homogénea.

(3) Combinamos agora a solução geral com a solução específica

$$u_n = a\ 2^n + b\ n\ 2^n + 5\ n^2 + 40\ n + 100$$

e procuramos determinar o valor das constante *a* e *b* que satisfazem as condições iniciais:

$u_0 = 130 \Leftrightarrow a = 30$

$u_1 = 125 \Leftrightarrow b = -40$

Logo

$$u_n = 30 * 2^n - 40\ n\ 2^n + 5\ n^2 + 40\ n + 100, \text{ com } n \geq 0$$

é a solução procurada para a nossa recorrência linear não homogénea.

Podemos ter-nos enganado nas contas!

Assim, comece por testar o resultado a que chegámos, calculando u_0 e u_1 pela expressão anterior, e calculando u_2 pela relação de recorrência e usando a expressão anterior.

E, pelo sim pelo não (para ter mesmo a certeza que não houve enganos), prove por indução que a expressão a que chegámos satisfaz a relação de recorrência.

∇

Vimos, na secção 2, métodos que podem ser utilizados para resolver relações de recorrência lineares, em geral de ordem 1, não necessariamente com coeficientes constantes ou homogéneas. Vimos, na secção 3, técnicas que nos permitem resolver relações de recorrência lineares (de várias ordens), de coeficientes constantes e homogéneas. E vimos, nesta secção, uma técnica que, em muitos casos, também nos permite resolver relações de recorrência lineares (de várias ordens), de coeficientes constantes, mas não homogéneas[31]. Para resolver outros tipos de relações de recorrência (que não se possam converter a uma destes tipos), precisamos de métodos mais poderosos, como *métodos que usam funções geradoras.* Estas utilizam séries (embora de uma forma relativamente simples) e não serão aqui abordadas. Sobre as funções geradoras e sua utilização para a resolução de relações de recorrência, o leitor interessado poderá consultar o livro [6] (ou, ainda, p.ex. os livros [27] e [30]).

Exercícios:

1. Resolva a recorrência:

   $u_0 = 1$ e $u_n = 3\ u_{n-1} - 5\ n + 2$, para $n \geq 1$

2. Resolva a recorrência:

   $u_0 = 1$ e $u_n = 3\ u_{n-1} - 4\ n^2$, para $n \geq 1$

3. Resolva a recorrência:

   $u_0 = 2$, $u_1 = 6$ e $u_n = 6\ u_{n-1} - 8\ u_{n-2} + 3$, para $n \geq 2$

[31] No capítulo 12 deparar-nos-emos com algumas relações de recorrência não lineares.

4. Resolva a recorrência:

   $u_0 = 2$, $u_1 = 6$ e $u_n = 7\ u_{n-1} - 10\ u_{n-2} + 16\ n$, para $n \geq 2$

∇