DETERMINAÇÃO DA DISTÂNCIA FOCAL DE UMA LENTE E ESTUDO DA FORMAÇÃO DE IMAGEM

1. Objectivo

Determinação da distância focal de uma lente convergente e de uma associação de lentes, e estudo da formação de imagem.

2. Introdução

Uma lente é um meio material transparente limitado por duas superfícies com curvatura regular. É utilizada para alterar a curvatura das frentes de onda ópticas; tal pode traduzir-se em focagem num ponto do espaço, em colimação, ou em aumento da divergência da frente de onda. Correspondentemente, os raios ópticos (trajectórias ortogonais às frentes de onda) são refractados em cada uma das faces, podendo ocorrer convergência (ou divergência) para um ponto, ou colimação. As lentes podem ser convergentes ou divergentes (de acordo com a acção sobre as frentes de onda), segundo a configuração das suas faces.

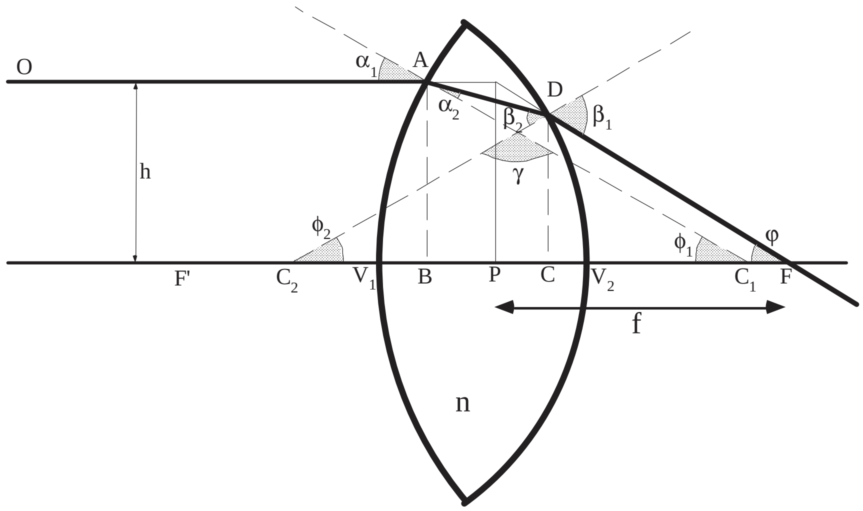
Uma lente fina é aquela em que a sua espessura pode ser desprezada quando comparada com a respectiva distância focal.

Pretende-se, neste trabalho, estudar a formação de imagens com uma lente convergente e com uma associação de lentes convergentes, daí extraindo a ampliação transversal, bem como as respectivas distâncias focais. Neste trabalho as lentes são consideras de pequena espessura.

3. Distância focal de uma lente

Consideremos uma lente simples, composta por um meio de índice de refracção n (relativamente ao meio envolvente) limitado por duas superfícies esféricas de raios R_1 e R_2 centradas, respectivamente, nos pontos C_1 e C_2 (o meio envolvente é frequentemente o ar, com índice de refracção •1). Esta geometria está representada na figura seguinte.

Note-se que outras superfícies de revolução (asféricas) podem ser usadas, com vantagem na formação de imagens estigmáticas (sem aberrações). Contudo, a sua fabricação é muito mais complexa, resultando num custo mais elevado.



Vamos considerar um raio óptico (OA) que entra na lente paralelo ao eixo óptico e a uma distância h deste. Este raio encontra a primeira interface esférica no ponto A, e faz com a normal à superfície um ângulo α_1. Este raio emergirá da lente no ponto D fazendo um ângulo β_1 com a normal à 2ª superfície. Após emergir da lente, o raio cruzará o eixo óptico no ponto F† designado por ponto focal da lente. A distância PF (f) é chamada distância focal da lente, sendo *P* (ponto principal) o ponto de cruzamento do raio axial objecto (OA) com o raio emergente (DF).

Vamos então determinar a distância focal da lente.

A aplicação da lei de Snell dá-nos (para índice de refracção do meio exterior igual a 1):

$$\begin{cases} 1 \cdot \mathrm{sen}(\alpha_1) = n \cdot \mathrm{sen}(\alpha_2) \\ n \cdot \mathrm{sen}(\beta_2) = 1 \cdot \mathrm{sen}(\beta_1) \end{cases}$$

Temos, também, as seguintes relações angulares:

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma = \phi_1 + \phi_2 + \gamma = \pi \quad ; \quad \alpha_1 = \phi_1 \quad ; \quad \beta_1 = \phi_2 + \varphi$$

que resultam em:

$$\alpha_1 + \beta_1 = \phi_1 + \phi_2 + \varphi = \alpha_2 + \beta_2 + \varphi$$

Teremos, assim:

---

† Isto verifica-se quando o centro de curvatura da primeira interface se encontra após esta, o centro de curvatura da segunda interface se encontra antes desta, e o índice de refracção do meio que compõe a lente for maior que o do meio que a circunda. Noutras condições, o raio emergente poderá não se cruzar com o eixo óptico à direita da lente (lente divergente). Podemos, para estes casos, determinar um ponto focal como o cruzamento do prolongamento para trás do raio emergente com o eixo óptico.

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{f}\right) = \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 - \beta_2$$

Esta equação tem resolução exacta, embora um pouco complicada. Se considerarmos que h é muito menor que o raio de curvatura das faces das lentes[††], podemos fazer a aproximação dos senos e tangentes dos ângulos serem iguais aos respectivos argumentos (**aproximação paraxial**). Aplicando esta aproximação às leis de Snell, obtemos:

$$\alpha_1 = n \cdot \alpha_2 \quad ; \quad n \cdot \beta_2 = \beta_1$$

Assim, teremos:

$$\varphi = (n-1) \cdot (\alpha_2 + \beta_2) = (n-1) \cdot (\phi_1 + \phi_2)$$

Como considerámos h muito menor que R_1 e R_2, podemos utilizar as aproximações $\varphi = h/f$, $\phi_1 = h/R_1$ e $\phi_2 = \overline{DC}/-R_2$. Se considerarmos ainda que a espessura da lente é pequena de forma a que $\overline{DC} \approx h$, obtemos:

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

Esta equação é normalmente designada por equação dos fabricantes de lentes, ou **equação das lentes finas**. Nesta equação é necessário ter atenção à convenção utilizada para os raios de curvatura. Se considerarmos o sentido positivo da esquerda para a direita, as interfaces cujo centro de curvatura se encontre à direita da interface terão raios de curvatura positivos, enquanto que aquelas cujos centros se encontrem à esquerda da interface terão raios de curvatura negativos.

A grandeza 1/f é designada por **potência da lente** e tem como unidade a dioptria (uma dioptria é a potência de uma lente que tem distância focal de um metro).

Se a espessura da lente não for desprezável, a equação anterior é alterada para:

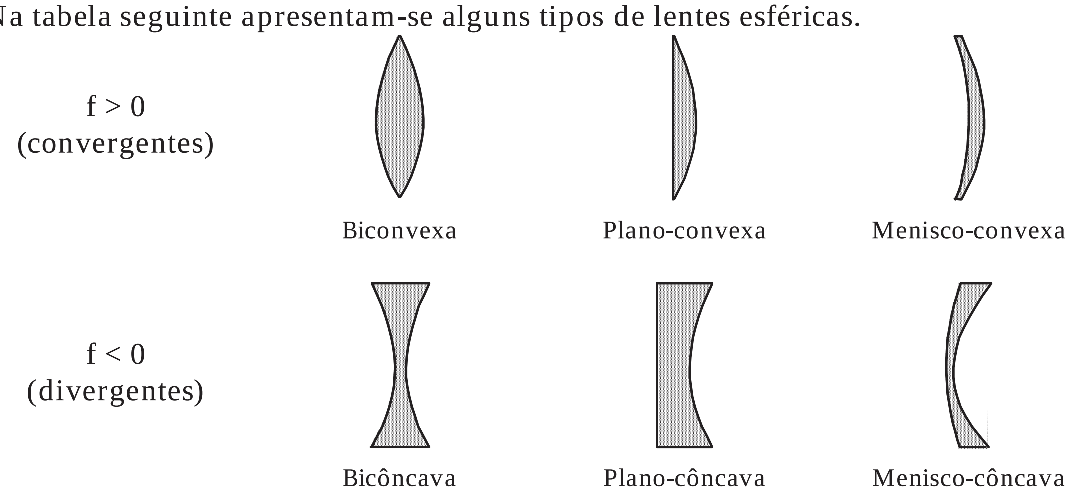
$$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1) \cdot d}{nR_1R_2}\right)}$$

em que d é a distância entre os vértices da lente espessa.

[††] Esta aproximação é válida para a grande maioria das lentes, pois os seus raios de curvatura têm dezenas de centímetros, tendo apenas alguns, poucos, centímetros de diâmetro.

Por simetria é fácil provar que um raio que cruze o eixo óptico num ponto (F'), simétrico ao ponto F, vai sair da lente paralelo ao eixo óptico. Normalmente o ponto F' é designado por **foco objecto** e F é designado por **foco imagem**.

Na tabela seguinte apresentam-se alguns tipos de lentes esféricas.

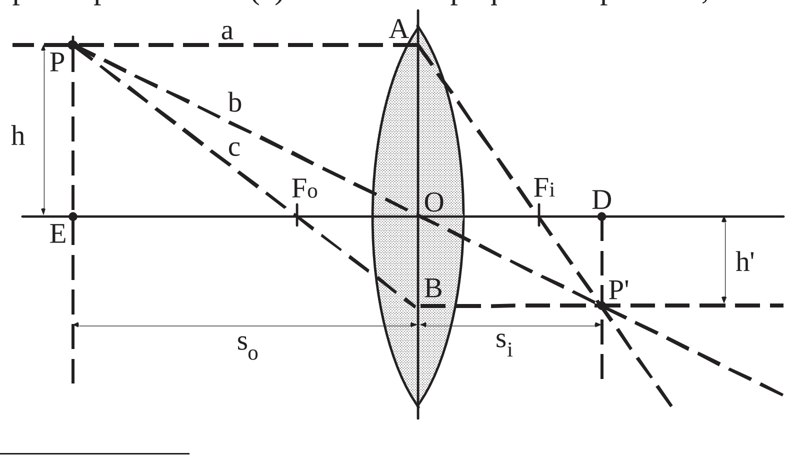


4. Formação de imagem por uma lente fina

Consideremos um ponto P situado a uma distância s_o (maior que a distância focal) de uma lente fina convergente, conforme indicado no esquema seguinte. A imagem de um ponto é determinada pelo cruzamento de dois raios que, partindo desse ponto, atravessam a lente[†].

Consideremos os raios designados por **a** (paralelo ao eixo óptico) e **c** (que passa pelo foco objecto). O raio **a** deverá passar pelo foco imagem, o raio **c** deverá sair paralelo ao eixo óptico. Assim, estes raios cruzam-se no ponto P'.

O raio **b**, que passa pelo centro (0) da lente de pequena espessura, não é desviado.



[†] Pode provar-se que, na aproximação paraxial, todos os raios provenientes de um ponto que atravessam a lente, convergem num único ponto (ponto imagem).

Dada a semelhança dos pares de triângulos (EPF_o, F_oOB) e (PAB, AOF_i), (F_iDP' e ABP') podemos escrever:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{EF_o}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{F_oO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \frac{h}{s_o - f} = \frac{h'}{f} = \frac{h + h'}{s_o}$$

e

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OF_i}} = \frac{\overline{DP'}}{\overline{F_iD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP'}} \Leftrightarrow \frac{h}{f} = \frac{h'}{s_i - f} = \frac{h + h'}{s_i}$$

Teremos:

$$\frac{h}{f} + \frac{h'}{f} = \frac{h + h'}{s_i} + \frac{h + h'}{s_o}$$

donde:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o}}$$

Esta é a equação (dita **equação de conjugação objecto-imagem**) que relaciona a distância s_i a que se forma a imagem (em relação à lente) com a distância focal f e a distância do objecto à lente s_o.

Novamente, é necessário ter em atenção as convenções de sinal. Assim, se convencionarmos propagação da esquerda para a direita, s_o é positiva se o objecto se encontrar à esquerda da lente e negativa se este se encontrar à direita (objecto virtual); s_i é positiva se a imagem se encontrar à direita da lente e negativa se se encontrar à esquerda (imagem virtual).

A razão entre as dimensões transversais da imagem e do objecto é designada por ampliação transversal M_T:

$$\boxed{M_T = \frac{h'}{h} = -\frac{s_i}{s_o}} \qquad \text{(no caso da figura } M_T < 0\text{)}$$

5. Traçado de raios através de uma lente

Quando queremos traçar o trajecto de um raio através de uma lente fina podemos socorrer-nos das **seguintes regras** (válidas na aproximação paraxial):

(a) Um raio incidente paralelo ao eixo óptico, vai cruzá-lo no ponto focal imagem.

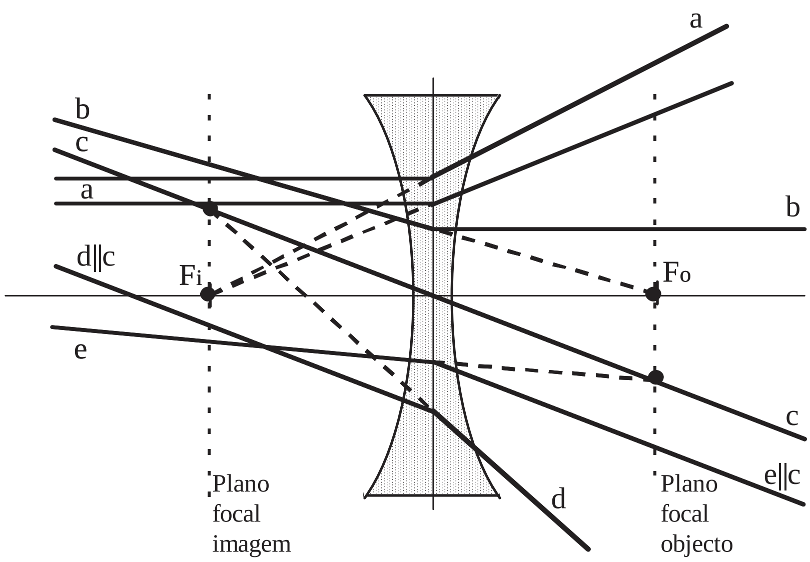
(b) Um raio incidente que passe no ponto focal objecto sairá da lente paralelo ao eixo óptico.

(c) Um raio incidente que passe no centro da lente não mudará de direcção.

(d) Todos os raios incidentes paralelos se cruzarão num único ponto do plano focal imagem.

(e) Todos os raios incidentes que se cruzem no plano focal objecto, sairão paralelos da lente.

A figura seguinte ilustra a utilização destas regras, no caso de uma lente divergente.

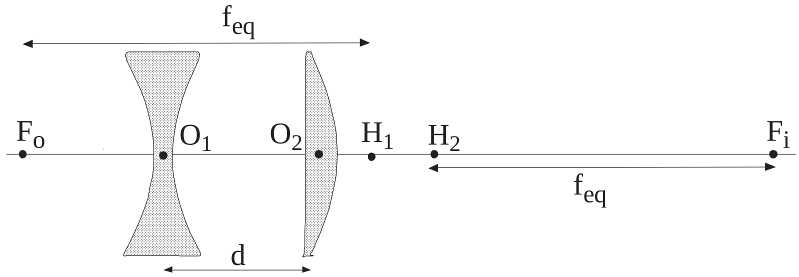


6. Associação de lentes

Se considerarmos duas lentes finas em contacto, a potência do conjunto é igual à soma das potências individuais. Em termos de distâncias focais, obtemos para a distância focal equivalente:

$$\boxed{\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}}$$

Se as duas lentes não estiverem em contacto, mas separadas por uma distância **d**, as expressões tornam-se um pouco mais complicadas. As distâncias focais são medidas a partir dos **planos principais** (planos transversais contendo H_1 e H_2).



Prova-se que:

$$\boxed{\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}}$$

localizando-se os pontos principais relativamente às lentes através de:

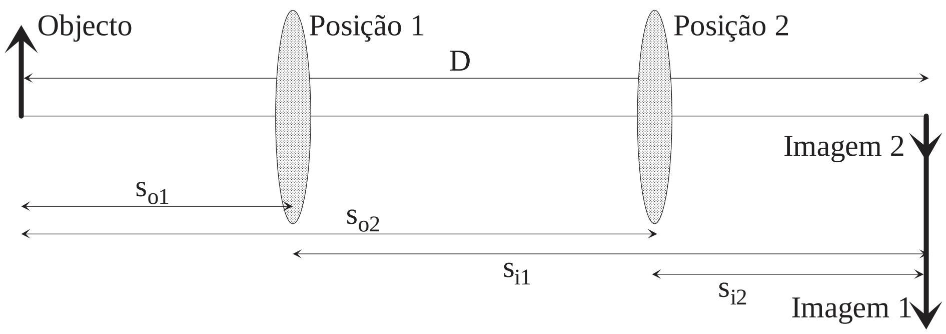
$$\overline{O_1H_1} = \frac{f_{eq}d}{f_2}$$

$$\overline{O_2H_2} = -\frac{f_{eq}d}{f_1}$$

Os planos principais passando em H_1 e H_2 são tais que um raio do espaço objecto intersecta o plano H_1 a uma cota igual à cota com que emerge de H_2 o raio imagem correspondente.

7. Determinação da distância focal de uma lente convergente

Consideremos um objecto e um alvo (em que possa ser projectada uma imagem do objecto) separados por uma distância **D**. Entre o objecto e o alvo é colocada uma lente. Se <u>**D** for maior que quatro vezes a distância focal da lente</u>, existirão duas posições da lente que permitem a formação da imagem.



(i) Utilizando as equações de conjugação e as relações de geometria da figura:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_{i1}} + \frac{1}{s_{o1}}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_{i2}} + \frac{1}{s_{o2}}$$

$$s_{o1} + s_{i1} = D$$

$$s_{o2} + s_{i2} = D$$

obtemos:

$$\boxed{f = \frac{s_i s_o}{D}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f = s_o - \frac{s_o^2}{D}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f = s_i - \frac{s_i^2}{D}}$$

Qualquer destas expressões permite calcular a distância focal da lente a partir de valores determináveis experimentalmente. No entanto, se analisarmos a propagação dos erros, verificamos que o erro cometido difere bastante, conforme a metodologia adoptada:

- Para a primeira equação, temos:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta s_i}{s_i} + \frac{\Delta s_o}{s_o} + \frac{\Delta D}{D}$$

- Para a segunda temos:

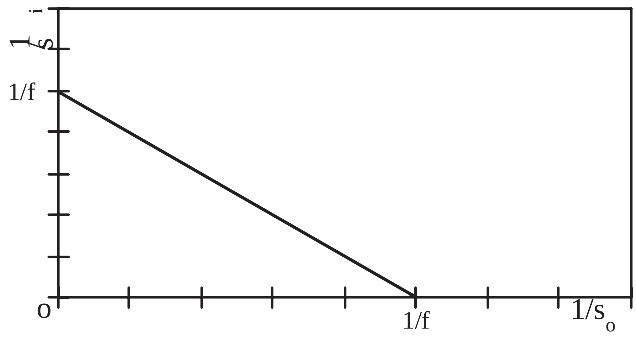
$$\Delta f = \left(1 + \frac{2s_o}{D}\right) \cdot \Delta s_o + \frac{s_o^2}{D^2} \cdot \Delta D$$

- Para a terceira teremos uma equação idêntica à anterior, apenas trocando s_o por s_i.

Se s_o (ou s_i) for bastante menor que **D** deveremos utilizar a segunda (ou terceira) equação pois o erro será bastante menor.

Assim, a distância focal poderá ser determinada a partir de uma simples medição de s_{o1} e s_{i1}, ou resultar dos valores determinados para as posições 1 e 2 da figura, mantendo **D** constante.

(ii) Uma forma de diminuir os erros experimentais consiste em repetir o processo (com **D** variável) e traçar o gráfico de $1/s_i$ em função de $1/s_o$. Este gráfico dará uma recta com declive -1 que intersecta os eixos nos pontos $1/f$.

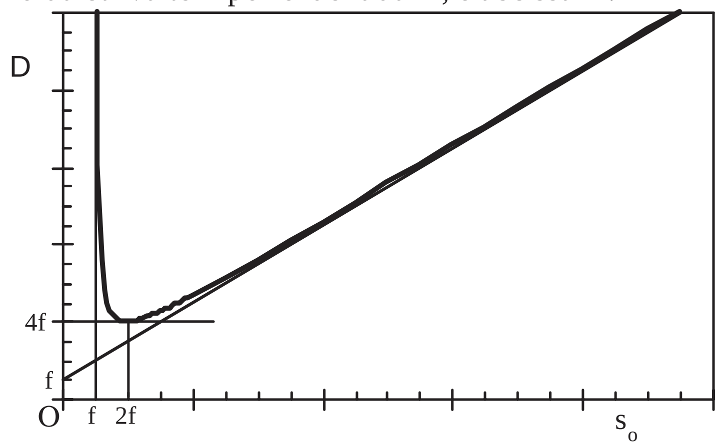


Note-se que os valores determinados experimentalmente para $1/s_o$ e $1/s_i$ deverão estar suficientemente intervalados para permitir definir a recta com pequeno erro.

(iii) Uma outra forma será traçar o gráfico de **D** em função de s_o. Este gráfico dará origem a uma parábola: $D = -\frac{s_o^2}{f - s_o}$

A partir do gráfico é possível extrair f de quatro formas distintas:

- Uma das assímptotas à curva intersecta o eixo das abcissas no ponto s_o=f.
- A outra assímptota intersecta o eixo das ordenadas no ponto D=f.
- O mínimo da curva tem por ordenada 4f, e abcissa 2f.



Note-se que, para definir convenientemente o mínimo da curva, devem ser determinados vários pontos na região de s_o•2f.

8. Referências

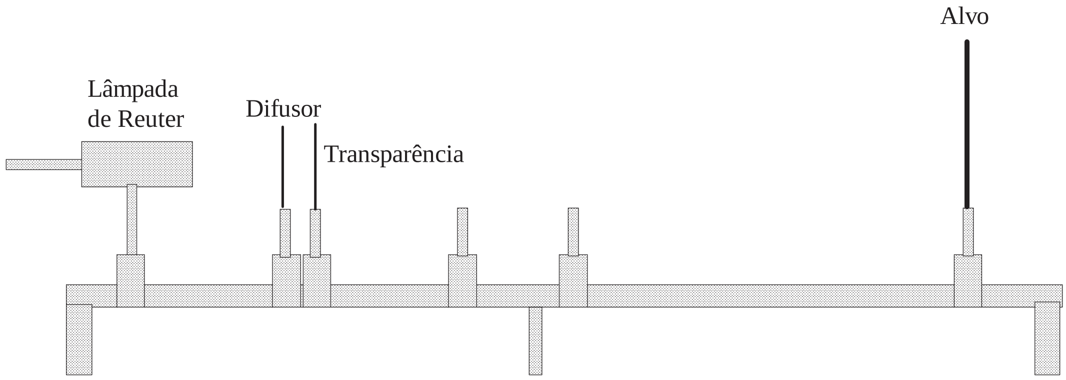
[1] Hecht, *Óptica*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1991

[2] Jenkins & White, *Fundamentals of Optics*

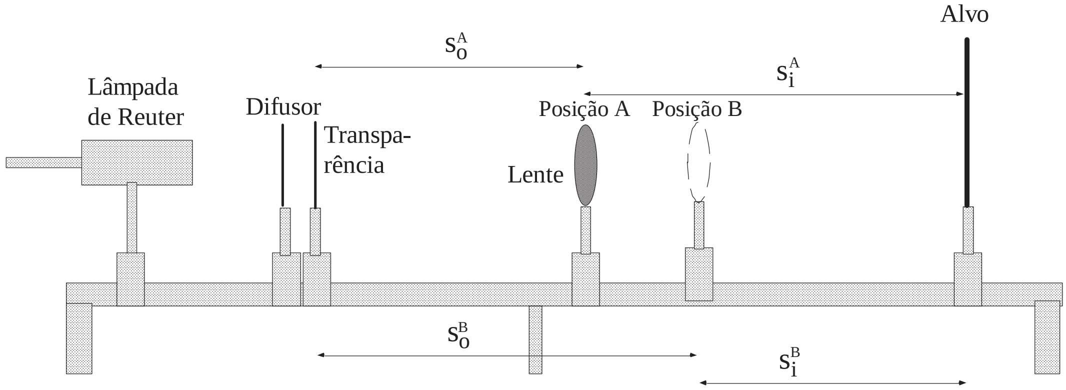
[3] F. Pedrotti, L. Pedrotti, *Introduction to Optics*

EXECUÇÃO DO TRABALHO

1. Sobre o banco de óptica, coloque a lâmpada de Reuter, um difusor, uma transparência (objecto) e um alvo, de acordo com o esquema da figura. Assegure-se de que existe um pequeno espaço entre a lâmpada e o difusor, para que este não aqueça demasiado e se deteriore. Meça as dimensões lineares do objecto (horizontal, vertical).



2. Coloque uma lente convergente num dos suportes e ajuste a sua posição até obter uma imagem nítida no alvo. Meça as distâncias transparência-lente (s_o), transparência-alvo (D), e lente-alvo (s_i). Meça também as dimensões lineares da imagem, em direcções ortogonais (vertical e horizontal).



3. Sem alterar as posições da transparência e do alvo, procure outra posição da lente que lhe permita obter uma segunda imagem nítida. Para esta posição, repita as medições anteriores.

4. Repita os pontos anteriores, para outras distâncias transparência-alvo (D). Registe os resultados obtidos num quadro idêntico ao seguinte:

D (cm)	s_0 (cm)	s_i (cm)	h (cm)	h' (cm)	M_T	$f = s_i s_0 / D$ (cm)	$f = s_0 - s_0^2/D$ (cm)	$f = s_i - s_i^2/D$ (cm)

5. Calcule a distância focal da lente (usando e intercomparando as várias possibilidades de determinação experimental) e a ampliação transversal das imagens (comparando com os valores obtidos nas medições).

(i) Trace o gráfico da recta $1/s_i$ em função de $1/s_o$ (com D variável) e determine daí f.

(ii) Trace o gráfico de D em função de s_o e determine f pelos vários métodos possíveis.

6. Repita os pontos anteriores para outra lente convergente.

7. Para uma associação de duas lentes (f_1, f_2, d), calcule as posições dos pontos H_1, H_2 e f_{eq}, e verifique a equação de conjugação: $1/s_o + 1/s_i = 1/f_{eq}$, com distâncias s_o, s_i medidas relativamente aos planos principais.

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$\overline{O_1H_1} = \frac{f_{eq} d}{f_2}$$

$$\overline{O_2H_2} = -\frac{f_{eq} d}{f_1}$$