

# Propagação de feixes Laser

## II — Estudos experimentais

M. ARCELINA MARQUES, CARLOS A. REGO, JOSÉ H. RODRIGUES,  
LUÍS BERNARDINO e JOSÉ R. SALCEDO

Laboratório de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Praça Gomes Teixeira — 4000 PORTO

*Neste trabalho é apresentado um método geral de medida do perfil transversal de intensidade de um feixe laser. Este método é aplicado à caracterização do feixe emitido por um laser gasoso. Com base nas leis de propagação de ondas esféricas-gaussianas, analisadas em artigo anterior [1], é caracterizada a onda emitida, e verificada a adequabilidade do modelo de ondas esféricas-gaussianas para este tipo de lasers.*

### 1. Introdução

Apresenta-se, neste artigo, uma técnica experimental que permite medir o perfil de intensidade de um feixe laser.

Este método de medida é particularmente simples, medindo-se directamente o integral do perfil de intensidade. A única exigência em termos de cálculos é uma derivação numérica.

Numa segunda fase, e a partir destas medidas, é feita uma verificação das leis de propagação de feixes laser baseada no modelo de propagação de ondas esféricas-gaussianas descrito anteriormente [1].

O interesse de se conhecer tanto a cintura do feixe como a sua localização no espaço [2], reside no facto de estes parâmetros serem importantes para aplicações, tais como garantir, por exemplo, um eficiente acoplamento entre o feixe laser e uma fibra óptica, a construção de microcomponentes ópticos, aplicações médicas e industriais de lasers, bem como medidas ópticas.

Mostra-se que é possível conhecer os parâmetros da propagação do feixe esférico-gaussiano, a partir da medida do diâmetro do feixe laser em dois pontos distintos da sua trajectória.

### 2. Modelo de ondas esféricas-gaussianas

Como é conhecido [1], uma onda esférica-gaussiana tem uma distribuição de fase esférica

e uma distribuição de amplitude gaussiana. Este tipo de onda descreve de forma adequada um feixe laser proveniente de uma cavidade óptica que oscile unicamente no modo transversal fundamental ( $TEM_{00}$ ) [3, 4, 5]. Os feixes originados em cavidades oscilando em modos transversais de ordem superior, exibem uma distribuição transversal de intensidade do tipo gaussiano, multiplicada por um polinómio de Hermite, e, por conseguinte, mais complexa.

Assumiremos, no que se segue, ser possível restringir a oscilação laser ao modo transversal fundamental, que experimenta menores perdas na cavidade. Muito frequentemente, tal é, na verdade, o caso. Sendo a intensidade definida como uma grandeza proporcional ao quadrado da amplitude da onda, o perfil de intensidade deste tipo de feixes laser será também uma função gaussiana. Assim, ao estudarmos a propagação de uma onda esférica-gaussiana, estamos automaticamente, a fazer o estudo da propagação de feixes laser deste tipo.

Um princípio bastante útil e válido neste tipo de estudo, é o princípio de Huyghens [1, 3, 6], que, além de ser bastante simples, permite, geralmente, chegar a resultados muito próximos da realidade.

Apesar da simplicidade do modelo adoptado [1], os resultados obtidos permitem comprovar a adequabilidade do modelo de ondas esféricas-gaussianas a feixes laser reais, em muitas circunstâncias de interesse prático.

### 3. Medição do perfil transversal de intensidade de feixes laser

A base deste estudo reside na medida do perfil transversal de intensidade do feixe laser, uma vez que, conhecendo este, se conhece, automaticamente, o diâmetro do feixe.

Existem numerosos métodos para este efeito. Referiremos de seguida alguns deles, descrevendo-os sucintamente, para que seja mais simples consubstanciar a nossa escolha.

Existem dois grandes tipos de métodos de medida da distribuição transversal de intensidade de um feixe laser: os fotográficos (ou videométricos) e os de varrimento.

Os primeiros permitem obter uma imagem que traduz a distribuição transversal de intensidade numa secção recta do feixe, que, posteriormente, conduzirá, por varrimento, à determinação do diâmetro correspondente.

Os segundos recorrem a um varrimento transversal da intensidade do feixe, utilizando um detector apropriado de reduzida área.

A escolha de um destes métodos poderá estar dependente das características específicas do laser em estudo.

#### 3.1. Métodos fotográficos

Algumas das técnicas apoiadas em métodos fotográficos, podem ser utilizadas para se ter, de forma expedita, uma ideia da estrutura dos modos na cavidade. Outras, porém, são muito mais sofisticadas, permitindo determinar quantitativamente a distribuição transversal de intensidade.

Numa das situações mais simples, uma película foto-sensível é colocada na frente do feixe a uma certa distância da saída do laser. A escolha, tanto do tempo de exposição, como da película, deve ter em conta as características físicas da radiação laser. A informação obtida por esta técnica, é uma imagem que ilustra a estrutura modal presente na cavidade [7].

Como técnica fotográfica mais precisa, pode recorrer-se à «fotometria fotográfica» [7]. Esta técnica baseia-se no facto de a densidade de

um negativo fotográfico ser, em primeira aproximação, uma função linear do logaritmo do tempo de exposição.

#### 3.2. Métodos de varrimento

Em métodos de varrimento, somente uma pequena parte do feixe, em cada instante, é detectada por um fotodetector. O sinal eléctrico é proporcional à intensidade incidente. Esta técnica permite-nos conhecer a distribuição transversal de intensidade do feixe tanto no «near-field» (zona de Fresnel), como no «far-field» (zona de Fraunhofer—longe da zona de Rayleigh), isto é, tanto a uma distância relativamente próxima da saída do laser, para a qual o feixe se apresenta ainda colimado, como para uma distância «longe» do espelho de saída do laser, para a qual o feixe poderá deixar de estar colimado. Estas técnicas estão, obviamente, sujeitas às limitações mecânicas do dispositivo de varrimento.

A resolução espacial dependerá da área sensível do fotodetector; quanto menor for essa área maior poderá ser a resolução, uma vez que um número superior de passos poderão ser possíveis para varrer por completo o perfil transversal de intensidade do feixe. Sendo os fotodetectores dispositivos lineares numa grande gama de intensidades, e tendo características altamente reprodutíveis, são muito mais precisos e poderão assegurar uma maior resolução na medida transversal de intensidade em relação às películas fotográficas, pelo menos em princípio.

Uma técnica possível, e talvez a que oferece mais vantagens, é a técnica por «knife-edge» [8], que será referida de seguida, dado o seu grande interesse prático e facilidade de implementação.

### 4. Técnica «knife-edge»

#### 4.1. Processo experimental

Esta técnica é particularmente simples. e permite-nos, com as medidas realizadas e o seu tratamento matemático posterior, conhecer

os parâmetros mais importantes associados à propagação de feixes laser, como a divergência do feixe no «far-field», o valor do seu diâmetro nos pontos em que foram feitas as medidas bem como a cintura do feixe e sua localização.

Na Fig. 1 está esquematizada a montagem experimental utilizada neste estudo. A lâmina indicada na montagem, é uma simples lâmina

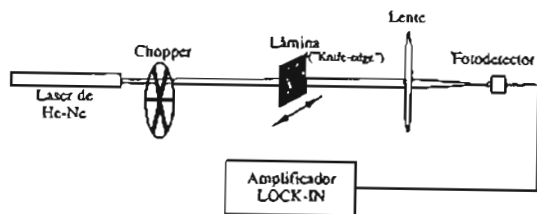


Fig. 1 — Montagem experimental utilizada.

de barbear que foi escurecida com negro de fumo, de modo a evitar reflexões na sua superfície metálica. Foi colocada num suporte montado em cima de uma plataforma de translação que permite deslocamentos micrométricos. A seguir à lâmina, colocou-se uma lente de pequena distância focal, de modo a focar o feixe no fotodetector, uma vez que este tem uma pequena área de detecção.

Para assegurarmos um detecção síncrona, melhorando assim a relação sinal/ruído, foi utilizado um interruptor periódico do feixe («chopper») juntamente com um amplificador síncrono («lock-in»). A este foi também ligado o fotodetector.

Para uma certa distância  $z$  entre o espelho de saída do laser e a lâmina, esta foi sendo deslocada por passos de  $50 \mu\text{m}$ , num plano transversal (variando  $x$ ) por meio do parafuso micrométrico da plataforma de translação.

Para realizar as medidas, podemos partir de duas situações opostas: ou o feixe está inicialmente obstruído pela lâmina, e é gradualmente desobstruído, ou o processo inverso, sendo, em qualquer caso, a potência transmitida captada pelo fotodetector. À medida que a lâmina se vai movendo no plano transversal, as medidas realizadas traduzem a integração da

intensidade do feixe em relação à variável  $x$ . Assim, fazendo uma representação gráfica das leituras, ou seja, da potência transmitida em função do deslocamento transversal da lâmina  $x$ , obtém-se um gráfico como o representado na Fig. 2. Se derivarmos a curva obtida em relação

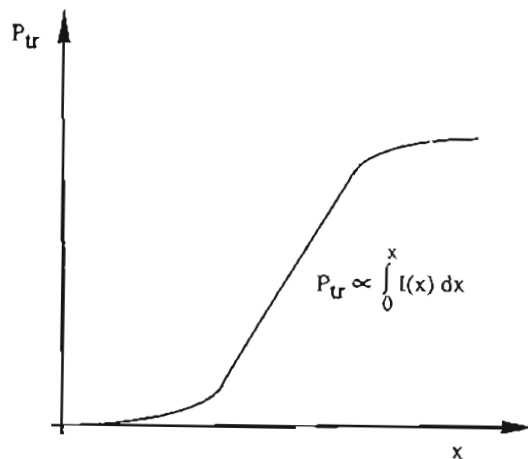


Fig. 2 — Representação do integral da intensidade de um feixe de perfil gaussiano (caso em que se iniciam nas medidas com o feixe obstruído pela lâmina).

à variável  $x$ , obteremos para cada  $x$ , o valor da intensidade do feixe.

#### 4.2. Desenvolvimento analítico

Existem dois tipos de definição para o diâmetro do feixe é a largura da distribuição total e o outro na intensidade. Assim, o diâmetro do feixe é a largura da distribuição gaussiana entre os pontos para os quais a intensidade (amplitude) assume um valor igual a  $1/e$  do seu valor máximo. O nosso estudo foi fundamentado na definição em termos de amplitude. Então, o diâmetro do feixe será a largura da curva gaussiana para a intensidade, entre os pontos para os quais ela decresce para  $1/e^2$  do seu valor máximo. Neste caso é usual denotar-se o raio do feixe por  $\omega$  e no outro caso por  $s$ .

Tendo  $I(x)$  um perfil gaussiano, pode ser representado da seguinte forma:

$$I(x) \propto \exp [-(A + Bx + Cx^2)] \quad (1)$$

Aplicando logaritmos à expressão (1), obtemos uma função polinomial de ordem dois:

$$Y = a + bx + cx^2 \quad (2)$$

para a qual  $Y = \ln I(x)$ ,  $a = -A$ ,  $b = -B$  e  $c = -C$ .

Pelo método dos mínimos quadrados, pode-se fazer a aproximação polinomial à curva experimental obtida, determinando deste modo os valores das constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Fica então, conhecida a forma analítica da intensidade,  $I(x)$ . O passo seguinte será a determinação do máximo dessa função,  $Y_{\max} \equiv \ln I_{\max} = -b/2c$  e os pontos  $x_1$  e  $x_2$  cuja imagem corresponde a  $I_{\max}/e^2$ . O valor absoluto da diferença entre esses dois pontos, será o valor do diâmetro do feixe ( $2\omega$ ), para a distância  $z$ , a que se referem as medidas.

Com o conhecimento do raio do feixe em dois pontos distintos na propagação,  $z_1$  e  $z_2$ , temos a possibilidade de determinar os parâmetros da sua cintura (raio mínimo e sua localização). Para isso, vamos recordar a equação de propagação de uma onda esférica-gaussiana [1]:

$$\omega(z)^2 = \omega_0^2 \left[ 1 + \left[ \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right]^2 \right] \quad (3)$$

Igualando esta expressão ao valor do raio do feixe,  $\omega_1$ , para uma distância  $z'$  ( $\equiv z_0 + z_1$ ) e, por outro lado, igualando ao valor de  $\omega_2$  para uma distância  $z'' \equiv z_0 + z_2 = z' + (z_2 - z_1)$  obtém-se um sistema de duas equações a duas incógnitas ( $\omega_0$  e  $z'$ ). Subtraindo as expressões para  $\omega_2^2$  e  $\omega_1^2$ , obtém-se a expressão:

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \left( \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \right)^2 \left[ 2z' (z_2 - z_1) + (z_2 - z_1)^2 \right] \quad (4)$$

A equação que nos dá a conhecer  $z'$  em função de  $\omega_0$ , pode ser obtida através de uma das equações do sistema acima referido. Por exemplo, considerando a equação para  $\omega_1$ , obtém-se:

$$z' = (\omega_1^2 - \omega_0^2) \left[ \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right]^2 \quad (5)$$

Substituindo o valor de  $z'$  dado por (5) na igualdade (4), temos como resultado, uma expressão polinomial de quarta ordem em  $\omega_0$ .

$$\omega_0^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) - \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 (z_2 - z_1)^2 = 2\omega_0 \left( \frac{\lambda}{\pi} \right) \cdot (z_2 - z_1) \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} \quad (6)$$

Quadrando esta expressão resulta

$$\omega_0^4 (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^4 (z_2 - z_1)^4 - 2\omega_0^2 \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \cdot (z_2 - z_1)^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) = 4\omega_0^2 \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 (z_2 - z_1)^2 (\omega_1^2 - \omega_0^2) \quad (7)$$

Dando outra forma à equação (7):

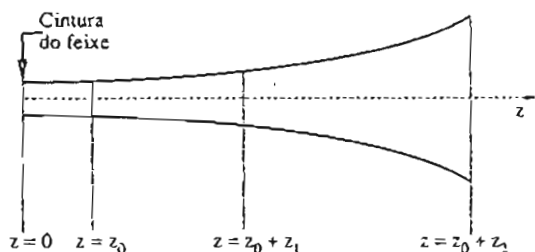
$$\omega_0^4 \left[ (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4 \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 (z_2 - z_1)^2 \right] + \omega_0^2 \left[ \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^2 (z_2 - z_1)^2 (-2\omega_2^2 - 2\omega_1^2) \right] + \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^4 (z_2 - z_1)^4 = 0 \quad (8)$$

Analisando a expressão (8), conclui-se que pode ser interpretada como uma equação de segundo grau na variável  $\omega_0^2$ . Serão obtidas 4 soluções (4.ª ordem em  $\omega_0$ ) simétricas duas a duas. As soluções com significado físico serão, naturalmente, as duas soluções positivas. Mas, destas duas, só uma é que será a correspondente ao caso em estudo, e portanto, possível.

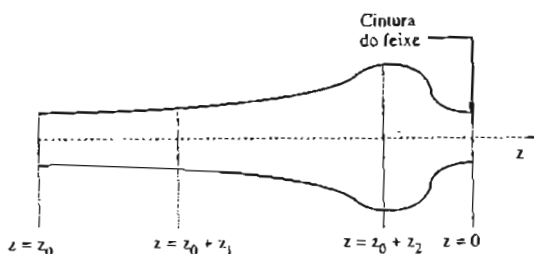
Para se julgar a validade do resultado, é necessário fazer uma interpretação esquemática cuidada. Para isso, será necessário usar a expressão (5), e determinar os valores correspondentes de  $z'$  relativos a um  $\omega_0$ . Também neste cálculo se obtém dois valores simétricos de  $z'$ , relativos a um  $\omega_0$ . Mas, agora temos a tarefa mais dificultada, porque não podemos eliminar, à partida, os valores negativos de  $z'$ . Ao calcularmos o valor de  $z'$  através de (5), estamos a fazer corresponder ao valor  $\omega_1$  a distância a ser calculada.

Segundo as condições iniciais, sabe-se que  $z_1 < z_2$  e  $\omega_1 < \omega_2$ . Nestas circunstâncias, podem acontecer várias situações, em termos da localização da cintura. Assim se  $|z'| > z_1$ , como o nosso ponto de referência, para a medida da distância  $z_1$ , foi o espelho de saída do laser, a cintura encontrar-se-á a uma distância  $z_1 - z'$  desse ponto. Considerando a solução positiva,  $z^+$ , essa diferença é negativa, o que indica que a cintura se encontrará no interior da cavidade laser (Fig. 3(a)).

Para a solução negativa  $z^-$ , a cintura do feixe estaria a uma distância de  $z_1$  igual a  $z^-$  (em sentido contrário), o que implicaria que o feixe tivesse duas cinturas como indica a Fig. 3(b).



(a)



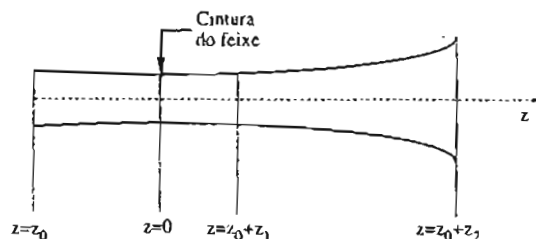
(b)

Fig. 3 — (a) Situação em que  $|z'| > z_1$  e  $z' > 0$   
(b) Situação em que  $|z'| > z_1$  e  $z' < 0$ . Em ambos os casos  $z = z_0$  indica a distância entre o espelho de saída do laser e a cintura (desconhecida à partida, e origem das coordenadas,  $z = 0$ ).

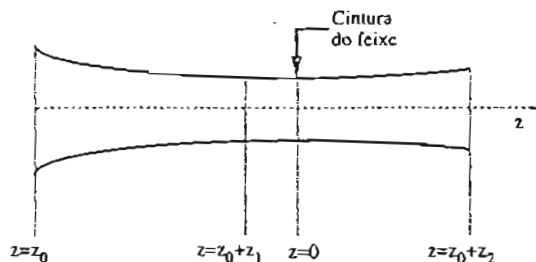
É claro que este não é, de foram alguma, o feixe laser que estudámos. Analisemos agora o caso em que  $|z'| < z_1$  e  $|z'| < z_2 - z_1$ . Pela mesma análise anterior, a cintura encontrar-se-á a uma distância  $z_1 - z'$  do espelho. Considerando a solução positiva, deparamos

com um feixe da forma representada na Fig. 4(a).

A solução  $z^-$  conduziu a que a cintura se encontrasse entre os dois diâmetros medidos, como indica a Fig 4(b).



(a)



(b)

Fig. 4 — (a) Situação em que  $|z'| < z_1$ ,  $z' > 0$  e  $|z'| < z_2 - z_1$ . (b) Situação em que  $|z'| < z_1$ ,  $z' < 0$  e  $|z'| < z_2 - z_1$ . Em ambos os casos  $z = z_0$  indica a distância entre o espelho de saída do laser e a cintura (desconhecida à partida das coordenadas,  $z = 0$ ).

Excepto a situação da Fig. 3(b), qualquer delas é válida. A situação mais usual, encontrada em lasers do tipo que está em estudo, é a representada na Fig. 3(a), em que a cintura se encontra no interior da cavidade. Vários factores podem explicar este facto. Este tipo de lasers simples, é frequentemente composto por uma cavidade hemisférica, isto é, uma cavidade cujo espelho de trás (altamente reflector), é esférico e o da frente (parcialmente reflector), é plano. Idealmente, um espelho plano implicaria que a cintura se encontrasse no plano do espelho. Em termos práticos, é mais corrente recorrer a um espelho quasi-plano, com um raio de curvatura muito grande.

Apesar de tudo, não podemos escolher a priori, a situação mais provável. ou seja a da

Fig. 3(a). É necessário apoiarmo-nos em factos. Como verificação, o primeiro passo a seguir é a confirmação do valor de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  aplicando os quatro resultados nas equações de propagação para  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , correspondentes a distâncias  $z'$  e  $z''$ . Somente dois destes valores confirmarão os resultados experimentais. Porém, destas duas soluções teremos de escolher uma e uma só. A maneira mais rápida de o fazer, é verificar, por mera observação, se o feixe está a ser focado numa zona entre  $z_1$  e  $z_2$ , isto é, ver se o diâmetro do feixe é relativamente maior no espelho de saída, do que propriamente entre  $z_1$  e  $z_2$ . Caso isto não seja possível, pode-se sempre medir novamente o diâmetro do feixe, para uma distância  $z_3$ , tal que  $z_3 < z_1$ . Com o valor para  $\omega_3$  obtido da mesma forma que  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , isto é, medindo a intensidade em  $z_3$ , faz-se a verificação para os dois valores de  $\omega_0$  encontrados e as correspondentes distâncias de  $z_3$ . Comparando estes valores com o obtido anteriormente, verifica-se que só um deles é correcto.

Encontramos, assim, o resultado adequado.

A técnica apresentada é das mais utilizadas para experiências do género, pois é das mais simples. O seu desenvolvimento matemático difere, consoante os autores. Por exemplo Nemoto [8] determina o diâmetro do feixe em vários pontos, de tal modo que:

$$z_{i-1} < z_i < z_{i+1} < z_{i+2} \dots$$

Depois de obter a curva  $s(z)$ , agrupa os resultados em dois conjuntos de medidas (medidas à esquerda e à direita da cintura), calculando para cada par de combinações de cada conjunto, as soluções para  $z_0$  e  $s_0$  ( $s_0$  é o raio da cintura do feixe segundo a definição baseada na intensidade). Este procedimento é repetido para todas as combinações possíveis entre os conjuntos de resultados. Finalmente a cintura e a sua posição são determinadas como uma média dos valores individuais, obtidos para cada combinação.

## 5. Medidas experimentais

Foi atrás referido, que para se obter a intensidade em cada ponto, seria necessário

calcular a derivada das leituras feitas. Como as leituras de  $x$  foram feitas a intervalos constantes, a fórmula matemática para a derivação vem simplificada. A derivada em cada ponto foi obtida numericamente utilizando o valor da função em 5 pontos.

As leituras foram feitas para a distância  $z_1 = 1.05$  m; o raio encontrado,  $\omega_1$ , foi de  $0.7463 \pm 10^{-5}$  mm para um sentido do deslocamento da lâmina, e  $0.7235 \pm 10^{-5}$  mm para o sentido contrário. O erro relativo entre estes dois valores é de 1.6 %. Para uma segunda distância,  $z_2 = 2.00$  m do espelho de saída do laser, foram obtidos os seguintes raios:  $1.1294 \pm 10^{-5}$  mm e  $1.1178 \pm 10^{-5}$  mm. Com estes valores determinou-se  $\omega_0$ .

Assim, foram encontrados os valores  $0.4322 \pm 10^{-5}$  mm e  $0.1036 \pm 10^{-5}$  mm para o raio da cintura e os correspondentes valores das suas posições 1275.3 mm e -374.35 mm em relação a  $z_1$  (o sinal negativo indica que a distância a que se refere, é medida para o lado direito de  $z_1$ ). Foram estes os dois conjuntos de valores que verificaram os raios medidos para as duas distâncias referidas,  $z_1$  e  $z_2$ . Como foi verificado experimentalmente que o feixe não estava a ser focado entre  $z_1$  e  $z_2$ , a situação da Fig. 4(b) foi automaticamente eliminada, restando por isso, a situação da Fig. 3(a).

Os gráficos das Figs. 5 e 6 dizem respeito às medidas feitas para  $z_1$ , representando as leituras obtidas e o perfil gaussiano da intensidade (Fig. 5), e a aproximação do logaritmo desta, a um polinómio do segundo grau (Fig. 6).

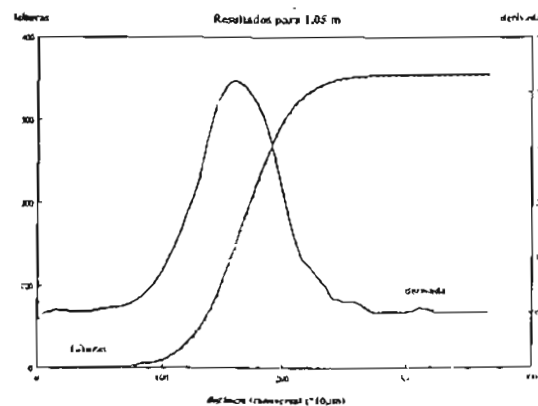


Fig. 5 — Representação das leituras e da sua derivada. Medidas feitas para a distância  $z_1 = 1.05$  m.

Os gráficos das Figs. 7 e 8 são análogos mas com as medidas efectuadas para  $z_2$ .

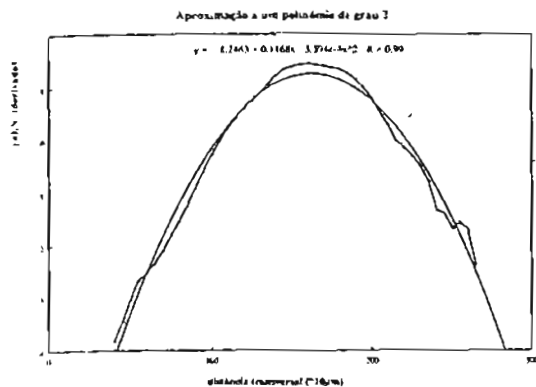


Fig. 6 — Aproximação do logaritmo nepperiano da derivada representada no gráfico da Fig. 5 a um polinómio do 2.º grau.

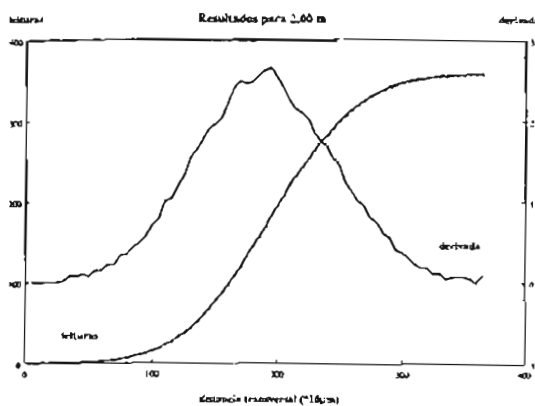


Fig. 7 — Representação das leituras e da sua derivada. Medidas feitas para a distância  $z_2 = 2.00$  m.

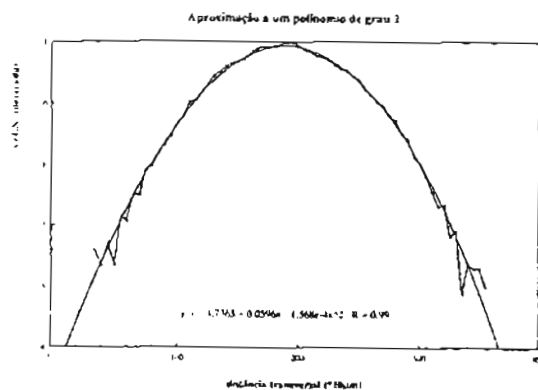


Fig. 8 — Aproximação do logaritmo nepperiano da derivada representada no gráfico da Fig. 7 a um polinómio do 2.º grau.

O erro do valor experimental de  $\omega_0$ , relativamente às especificações, foi de 11.2 %. Este valor é considerado aceitável, atendendo ao facto do valor especificado no manual ser apenas típico para lasers desse modelo. Não é, portanto, um valor numérico específico para o laser em questão.

## 6. Conclusão

Foram realizadas medidas experimentais do perfil transversal de intensidade de um feixe laser, suposto gaussiano, utilizando a técnica «knife-edge». O elevado grau de concordância obtido entre as medidas e o modelo teórico permite concluir da sua adequabilidade a estudos deste tipo. Com a ajuda de um pequeno programa escrito em BASIC determinaram-se os valores para  $\omega_0$ , para  $z_0$  e para a distância de Rayleigh,  $z_R$ , bem como a representação gráfica de  $\omega(z)$  e de  $R(z)$ .

Com o conhecimento destes parâmetros, asseguramos a caracterização completa do feixe laser, neste modelo simplificado de ondas esféricas-gaussianas.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] M. B. MARQUES, JOSÉ R. SALCEDO — «Propagação de feixes laser: I—Estudos teóricos», *Gazeta de Física*, 12, 11 (1989).
- [2] RUSSELL L. MCCALLY — Measurement of Gaussian beam parameters», *Applied Optics* 23, 2227 (July 15, 1984).
- [3] A. E. SIEGMAN — *Lasers* (University Science Books, California, 1986), Chap. 14, 15, 16, 17.
- [4] M. YOUNG — *Optics and Lasers*, (Springer-Verlag, New York, 1977), Chap. 4.
- [5] J. SALCEDO — «Os Lasers», *Revista Colóquio de Ciências*, editada pela Fundação Calouste Gulbenkian, n.º 1, Fev. 88.
- [6] A. E. SIEGMAN — *An Introduction to Lasers and Masers*, (McGraw-Hill, New York 1971), Chap. 8.
- [7] H. G. HEARD — *Laser Parameter Measurements Handbook* (Wiley, USA, 1968), Chap. 3.
- [8] J. M. KHOSROFIAN and B. A. GARETZ — «Measurement of a gaussian laser beam diameter through the direct inversion of Knife-edge data», *Applied Optics* 22, 3406-3409 (Nov. 1, 1983).
- [9] S. NEMOTO — «Determination of waist parameters of a Gaussian beam», *Applied Optics* 25, 3859-3863 (Nov. 1, 1986).