

## **MEDIÇÃO DAS DIMENSÕES DE ABERTURAS E FIOS USANDO A DIFRACÇÃO DE FRAUNHOFER**

### **1. Objectivo**

Medir os diâmetros de uma abertura linear estreita, de um fio fino e de um orifício circular microscópico, usando uma técnica de difracção óptica. Observar padrões de difracção de outros objectos simples.

### **2. Introdução**

A propagação de luz através de aberturas ou obstáculos de reduzidas dimensões torna evidentes fenómenos de difracção, em que se observam desvios apreciáveis às previsões simplistas resultantes de uma aproximação de Óptica Geométrica à propagação da luz.

Orifícios ou fios de pequeno diâmetro originam distribuições luminosas com zonas alternadamente iluminadas e escuras, quando observadas a distâncias muito grandes relativamente às dimensões desses objectos.

A análise desses padrões de difracção relaciona, de forma simples, as suas características com as do objecto difractor, permitindo medir (sem contacto mecânico) as suas dimensões.

### **3. Difracção e Óptica Geométrica**

A descrição da propagação de ondas ópticas deveria fazer-se, com todo o rigor, por aplicação das equações de *Maxwell* e correspondentes condições fronteira. Na prática, e salvo situações extremamente simples, tal não é viável, pois o problema matemático correspondente é extremamente difícil e de com solução rigorosa impossível de calcular.

Em muitas questões, todavia, é possível obter soluções aproximadas satisfatórias, recorrendo à Óptica Geométrica. Este é o tratamento aproximado da propagação de ondas, no limite de comprimento de onda nulo. A aplicação sistemática das leis da Óptica Geométrica (refracção, reflexão) permite resolver muitas questões importantes (formação de imagens e projecto básico de sistemas ópticos, por exemplo).

Todavia, o tratamento da Óptica Geométrica não é exacto. Por exemplo, a Óptica Geométrica prevê uma transição abrupta entre a zona iluminada e a sombra de um objecto. Uma observação minimamente cuidadosa permite verificar uma transição bem mais complicada, com bandas escuras na zona que a Óptica Geométrica indica como iluminada, e bandas de luz na região de sombra prevista pela Óptica Geométrica. Um outro exemplo das falhas da aproximação da Óptica Geométrica corresponde à distribuição de intensidade no foco de uma lente convergente ideal, iluminada por raios paralelos axiais. A Óptica Geométrica prevê uma densidade de potência infinita, resultante da existência de um foco pontual. Uma observação cuidadosa da zona focal mostra a existência de anéis luminosos.

A discrepância entre as previsões da Óptica Geométrica para essas distribuições luminosas e a observação designa-se genericamente por difracção.

#### 4. Integral de *Huygens-Fresnel*

Um problema básico é o da propagação de uma onda óptica através de uma abertura num ecrã, considerando campos escalares (i.e., não incluindo o carácter vectorial do campo, o que é geralmente aceitável). Considera-se, também por simplicidade, radiação monocromática.

Uma solução aproximadamente correcta pode ser obtida usando o **princípio de Huygens**, de formulação muito simples:

- Cada ponto de uma frente de onda (superfície de fase constante) pode ser visto como fonte de uma onda secundária esférica; a envolvente de todas as ondas secundárias dá origem a uma outra frente de onda num instante posterior; e assim sucessivamente. A interferência (sobreposição) entre as ondas secundárias origina a nova frente de onda.



A presença de um obstáculo perturba a propagação, eliminando partes da frente de onda incidente; a interferência entre ondas secundárias provenientes da zona da abertura iluminada, resulta numa onda com estrutura bem diferente da onda iluminante.

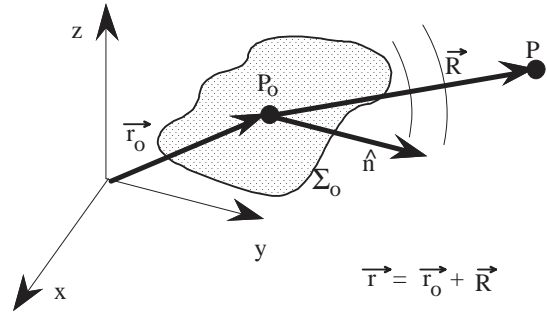
### S2.3 Difraccção

Considerando a abertura  $\Sigma_0$  iluminada por uma onda  $E_i(\vec{r})$ , o campo em  $P$  resulta da sobreposição de ondas secundárias esféricas (de amplitude  $E_i \frac{e^{-ik\vec{R}}}{R}$ , em notação fasorial) e escreve-se

$$E(\vec{r}) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} E_i(\vec{r}_0) \frac{e^{-ik\vec{R}}}{R} C ds$$

em que  $C$  é um factor de obliquidade

$$\frac{\cos(\hat{n}, \vec{R}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}_f)}{2}$$



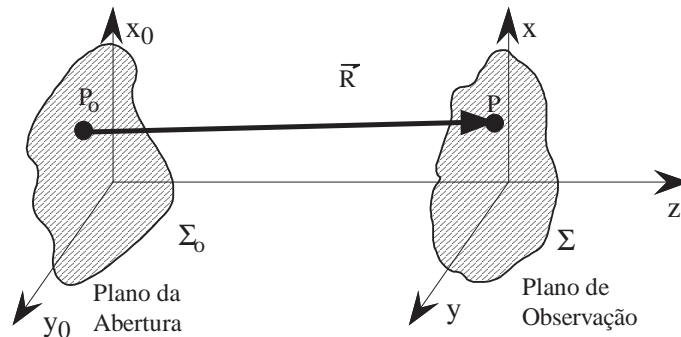
sendo  $\vec{r}_f$  o vector de posição da fonte de iluminação. Para ângulos de iluminação e de observação pequenos, o factor de obliquidade é aproximadamente constante e igual a um.

O cálculo do campo difractado  $E(\vec{r})$  a partir da expressão (**integral de Huygens-Fresnel**)

$$E(\vec{r}) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} E_i(\vec{r}_0) \frac{e^{-ik\vec{R}}}{R} ds$$

necessita, na prática, de aproximações, que o tornem viável.

### 5. Aproximação de Fresnel



Considerando a representação da figura, em que o campo  $E(\vec{r})$  em pontos  $P$  numa zona  $\Sigma$  de um plano de observação resulta, através da equação anterior, do campo  $E_i(\vec{r}_0)$  nos pontos da abertura  $\Sigma_0$ , e a respectiva geometria, tem-se:

$$\bar{R} = (x - x_0, y - y_0, z)$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - x_0}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{z}\right)^2}$$

Na **aproximação paraxial** (ou de *Fresnel*):

$$\left. \left(\frac{x - x_0}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{z}\right)^2 \right|_{\max} \ll 1 \quad (\text{para } z \text{ elevado e pequenas dimensões laterais de } \Sigma)$$

e resulta, da expansão em série de Taylor de  $R$ :

$$R \simeq z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z}$$

No integrando da fórmula de Huygens-Fresnel poderão ser introduzidas, assim, duas aproximações:

- no denominador, basta fazer  $R \simeq z$
- no expoente, é necessário usar

$$\bar{k} \cdot \bar{R} \simeq kz + \frac{k}{2z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$

(uma vez que  $|\bar{k}| = 2\pi/\lambda$  tem valor elevado, e  $R$  deve ser calculado com erro muito inferior ao comprimento de onda).

Assim, resulta o **integral de Fresnel**:

$$E(x, y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikz}}{z} \iint E_i(x_0, y_0) e^{-i\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} dx_0 dy_0$$

que continua, em geral, a ser de cálculo muito difícil. Daí introduzirem-se outras aproximações, naturalmente associadas a condições de validade mais restritivas.

## 6. Aproximação de *Fraunhofer*

Trata-se de uma aproximação mais forte que a anterior, quando a distância de observação é muito elevada e a dimensão da abertura  $\Sigma_0$  é pequena:

$$\frac{k}{2z} (x_0^2 + y_0^2) \Big|_{\max} \ll 1 \quad (\text{aproximação do campo longínquo})$$

Resulta então o **integral de Fraunhofer**

$$E(x, y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikz}}{z} e^{-\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \iint E_i(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{z}(xx_0 + yy_0)} dx_0 dy_0$$

O integral tem a forma da transformada de *Fourier* bidimensional  $F$  do campo  $E_i(x_0, y_0)$  na abertura iluminada, nas frequências espaciais  $(f_x, f_y) = (x/\lambda z, y/\lambda z)$ , pelo que podemos escrever de forma simplificada:

$$E(x, y) = A e^{-\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} F \left\{ E_i(x_0, y_0) \right\} \left( \frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right)$$

A expressão anterior é muito útil (quando se têm conhecimentos suficientes sobre as Transformadas de Fourier), pois permite calcular a distribuição do campo eléctrico "à saída" desde que se conheça a descrição do campo eléctrico "à entrada", e que sejamos capazes de calcular a respectiva transformada.

### 7. Difraccção de *Fraunhofer* de uma Fenda

Neste caso, supõe-se que a distribuição de campo na fenda é dada por:

$$E_i(x_0, y_0) = \begin{cases} E_i = \text{constante} & , |x_0| < D/2 \\ 0 & , |x_0| > D/2 \end{cases}$$

independente de  $y_0$  (ou seja, uma função rectangular em  $x_0$  correspondente a iluminação da fenda por um feixe colimado segundo  $zz$ ). Isto conduz a uma distribuição de intensidade difractada (onde  $\langle \rangle$  significa valor médio temporal):

$$I(x, y) = \langle E(x, y)^2 \rangle = I(0) \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 = I(0) \text{sinc}^2 \alpha$$

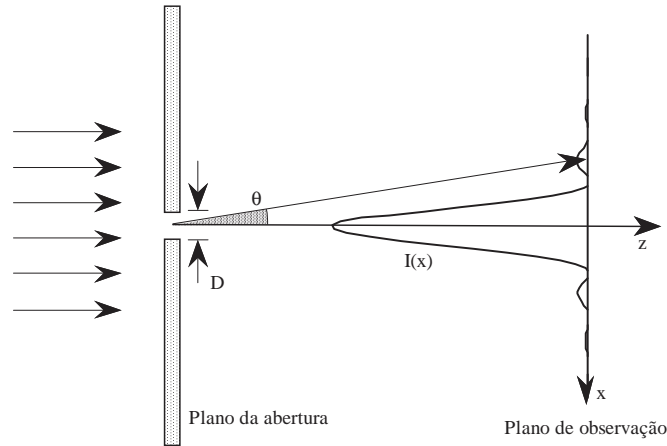
independente de  $y$ , com

$$\alpha = k \frac{D}{2} \cdot \frac{x}{z} = k \frac{D}{2} \sin \theta$$

Para  $x \ll z$ ,  $\sin \theta \approx \text{tg} \theta$

Note-se que se forma um padrão de difracção com riscas brilhantes e escuras alternadas. O período das riscas aumenta quando a largura da abertura  $D$  diminui e vice-versa.

Os zeros da função  $\text{sinc}^2 \alpha$  ocorrem para  $\alpha = \pm n\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$



Da observação do padrão de difracção, e conhecido  $k = 2\pi/\lambda$ , é possível determinar  $D$ . Considerando o zero do padrão de difracção de ordem  $n$  vem:

$$D = n\lambda \frac{z}{x_n} = \lambda \frac{z}{X}$$

sendo  $X = \frac{x_n}{n}$  o período do padrão de interferência.

Note-se ainda a dependência em  $\lambda$  (comprimento de onda).

De forma aproximada, um fio opaco pode considerar-se um obstáculo com distribuição de campo complementar da correspondente à fenda (abertura complementar). O padrão de difracção observado é idêntico, e o diâmetro do fio pode ser determinado de forma análoga.

### 8. Difracção de *Fraunhofer* de um orifício circular

Para um orifício circular de diâmetro  $2a$ , a distribuição de campo na abertura (iluminada por um feixe colimado segundo  $zz$ ) é convenientemente expressa em coordenadas polares  $(\rho_0, \phi_0)$ :

$$E_i(\rho_0, \phi_0) = \begin{cases} E_i = \text{constante} & , \rho_0 < a \\ 0 & , \rho_0 > a \end{cases}$$

independente de  $\phi_0$  (ou seja, uma função círculo em  $(x_0, y_0)$ ). A transformada de *Fourier* em coordenadas cartesianas é calculada mais facilmente como transformada de *Fourier-Bessel* em coordenadas polares, de onde resulta uma distribuição de intensidade (padrão de *Airy*):

$$I(\theta) = I(0) \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2$$

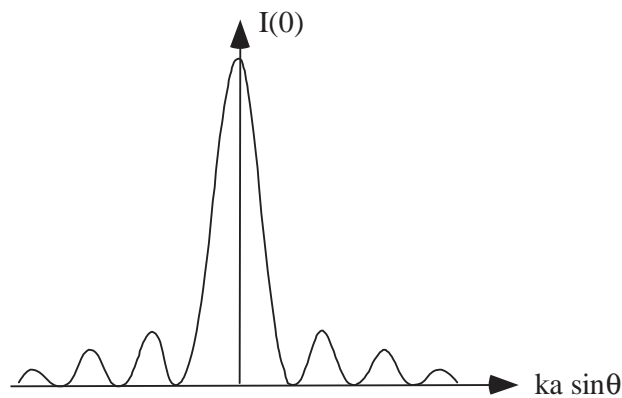
com  $\sin \theta = \rho/z$ , onde  $J_1$  é a função de *Bessel* de primeira espécie, de ordem um (para  $\rho \ll z$ , vem ainda que  $\sin \theta \approx \text{tg } \theta \approx \rho/z$ ).

Os primeiros zeros de  $J_1$  ocorrem para  $ka \sin \theta = 3.83, 7.02$  e  $10.17$ . Assim, o raio do lobo central  $\rho_1$  ocorre para

$$ka \sin \theta_1 = ka \frac{\rho_1}{z} = 3.83$$

donde:

$$\rho_1 = \frac{3.83}{\pi} \frac{z\lambda}{2a} = 1.22 \frac{z\lambda}{2a}$$



Para os zeros seguintes, tem-se:

$$\rho_2 = \frac{7.02}{\pi} \frac{z\lambda}{2a}$$

$$\rho_3 = \frac{10.17}{\pi} \frac{z\lambda}{2a}$$

Notar ainda aqui uma relação inversa entre os raios  $\rho_n$  e o diâmetro  $2a$  do orifício. A medição de  $\rho_n$  permite determinar o diâmetro  $2a$ .

## 9. Difracção de *Fraunhofer* de Outras Funções-Abertura

### (i) Orifício rectangular

Consideremos um orifício rectangular com dimensões  $a$  (segundo  $x$ ) e  $b$  (segundo  $y$ ). A distribuição de intensidade no plano de observação será ainda calculada através de transformação de *Fourier* bidimensional, resultando:

$$I(x, y) = I(0, 0) \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\kappa a}{2} \cdot \sin \theta_x\right)}{\frac{\kappa a}{2} \cdot \sin \theta_x} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\kappa b}{2} \cdot \sin \theta_y\right)}{\frac{\kappa b}{2} \cdot \sin \theta_y} \right]^2$$

Para distâncias de observação grandes, teremos:

$$\sin \theta_x \approx \text{tg} \theta_x \approx \frac{x}{z} \quad \text{e} \quad \sin \theta_y \approx \text{tg} \theta_y \approx \frac{y}{z}$$

De forma análoga à descrita atrás para uma fenda, as dimensões do orifício ( $axb$ ) podem ser determinadas a partir dos zeros do padrão de difracção nas duas direcções.

**(ii) Duas fendas lineares paralelas**

Consideremos duas fendas lineares de largura  $a$  com centros separados pela distância  $b$ . A distribuição de intensidade no plano de observação será:

$$I(x, y) = I(0, 0) \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\kappa a}{2} \cdot \sin \theta\right)}{\frac{\kappa a}{2} \cdot \sin \theta} \right]^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\kappa b}{2} \cdot \sin \theta\right)$$

Para distâncias de observação grandes, teremos:

$$\sin \theta \approx \text{tg} \theta \approx \frac{x}{z}$$

**(iii) Rede de difracção**

Consideremos uma rede de difracção com período  $b$ , largura de fenda  $a$  e número total de fendas  $N$ . A distribuição de intensidade no plano de observação será:

$$I(x, y) = \frac{I(0, 0)}{N^2} \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\kappa a}{2} \cdot \sin \theta\right)}{\frac{\kappa a}{2} \cdot \sin \theta} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin\left(N \cdot \frac{\kappa b}{2} \cdot \sin \theta\right)}{\frac{\kappa b}{2} \cdot \sin \theta} \right]^2$$

Para distâncias de observação grandes, teremos:

$$\sin \theta \approx \text{tg} \theta \approx \theta \approx \frac{x}{z}$$

Se  $N$  for muito grande, só existirá radiação para os ângulos  $\theta$  que satisfaçam a condição:



### ***S2.3Difracção***

---

$$\frac{kb}{2} \cdot \theta = m \cdot \pi \quad , \quad \text{com } m \text{ inteiro}$$

Tal corresponde à obtenção de ordens de difracção  $m$ . Dado que  $k = 2\pi/\lambda$ , é evidente a dependência do desvio angular  $\theta_m$  da ordem  $m$  no comprimento de onda da radiação; daí o uso destas redes na dispersão cromática.

### **10. Referências**

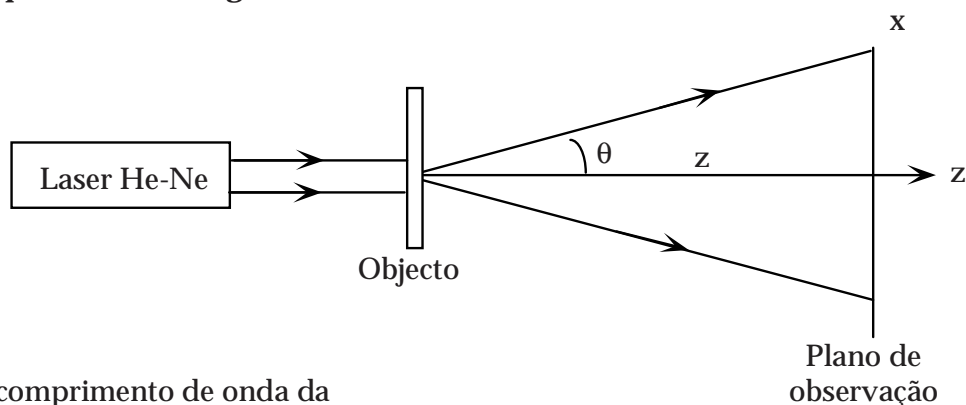
- Hecht, *Óptica*, Fundação Calouste Gulbenkian
- Guenther, *Modern Optics*
- Goodman, *An Introduction to Fourier Optics*

## EXECUÇÃO DO TRABALHO

## 1. Objectivo

Medir os diâmetros de uma abertura linear, de um fio e de um orifício circular usando uma técnica de difracção. Observar diversos padrões de difracção.

## 2. Esquema da montagem:



comprimento de onda da  
radiação laser He-Ne:  $\lambda_0 = 632.8 \text{ nm}$

- Use um banco de óptica longo ( $\gtrsim 3\text{m}$ ). O laser de He-Ne emite radiação quase-monocromática e praticamente colimada. Coloque os objectos próximos do laser e o ecrã de observação o mais afastado possível.
- Para uma fenda linear de abertura  $D$ , meça as distâncias dos zeros de intensidade ao centro do padrão de difracção.

Use os zeros mais afastados para ambos os lados do centro do padrão para obter o período espacial ( $X$ ). Determine a dimensão  $D$  da fenda, sabendo que o padrão de difracção é dado por  $I(x) = I(0) \text{sinc}^2 \alpha$ , sendo  $\alpha = k(D/2)x/z$ , e os zeros ocorrem para  $\alpha = \pm n\pi$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$D = \lambda \frac{z}{X}$$

Estime o erro da determinação.

- Repita o passo anterior para outras fendas de que disponha, e para um fio fino, e calcule o seu diâmetro ( $2a$ ) usando os zeros do padrão de difracção (e as mesmas expressões).
- Repita a medição para um orifício circular, e calcule o diâmetro usando os primeiros zeros do padrão de difracção, sabendo que

$$I(\rho) = I(0) \left[ \frac{2J_1(ka \rho/z)}{ka \rho/z} \right]$$

e os primeiros zeros de intensidade ocorrem para  $\alpha_i = \frac{ka\rho_i}{z}$  tomando os seguintes valores (zeros da função  $J_1(\alpha_i)$ ):

$$\alpha_1 = 3.832$$

$$\alpha_2 = 7.016$$

$$\alpha_3 = 10.173$$

$$\alpha_4 = 13.324$$

Donde resulta que se pode determinar  $a$  pela medição dos raios  $\rho_i$  em que se anula a intensidade do padrão de difracção:

$$a = \left( \frac{\lambda z}{2\pi} \right) \frac{\alpha_i}{\rho_i} = C \frac{\alpha_i}{\rho_i}$$

com  $C = \frac{\lambda z}{2\pi}$

i	$\alpha_i$	$\rho_i$	$a = C \frac{\alpha_i}{\rho_i}$
1	3.832		
2	7.016		
3	10.173		
4	13.324		

Verifique qual das determinações conduziu à menor incerteza de  $a$ .

7. Repita para outra abertura circular, caso ela esteja disponível.
8. Utilizando uma rede de difracção, meça a separação entre os pontos de ambos os lados do ponto central para as diferentes ordens  $m$ , e determine (por exemplo através de uma recta), o comprimento de onda do laser. A distância entre a rede e o ecrã deve ser menor que 10 cm.