ÓPTICA X

Cap. VII - Sobreposição de Ondas

Talvez se lembrem que quando falamos da equação de onda:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

referimos que se duas soluções ψ_1 e ψ_2 são soluções dessa equação, então também a sua soma $\psi_1 + \psi_2$ é uma solução.

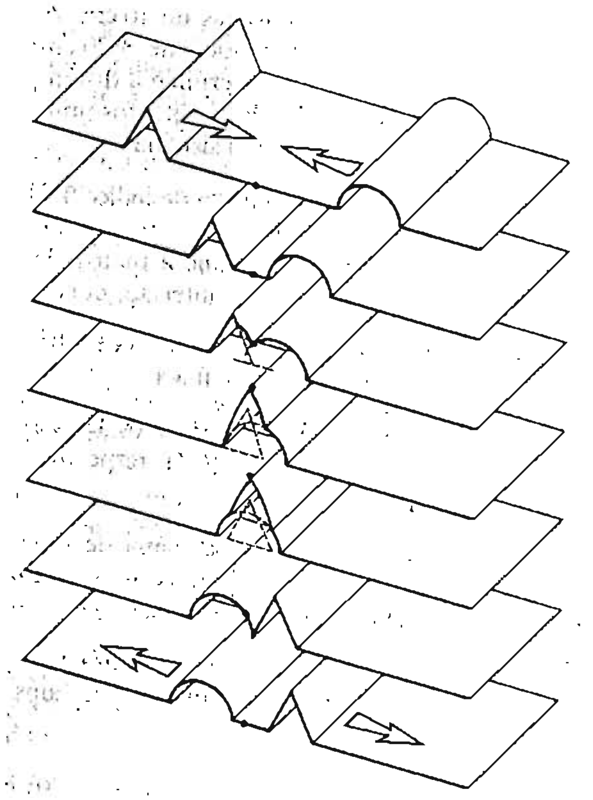


Figura 7.1 Sobreposição de duas perturbações.

Esta propriedade é conhecida por Princípio da Sobreposição

(Este princípio é válido em sistemas lineares, como todos os que vamos considerar aqui.

Neste capítulo vamos igualmente considerar apenas ondas escalares (esquecendo a natureza vectorial: Polarização).

Recordemos que as soluções são do tipo:

$$E(x,t) = E_0 \operatorname{Sen}\left[\omega t - Kx + \varepsilon\right]$$
$$= E_0 \operatorname{Sen}\left[\omega t + \alpha\right]$$

em que $\alpha = -KX + \varepsilon$

Se tivermos duas ~~ondas~~ ondas com a mesma frequência e a mesma velocidade:

$$E_1 = E_{01} \operatorname{Sen}[\omega t + \alpha_1]$$
$$E_2 = E_{02} \operatorname{Sen}[\omega t + \alpha_2]$$

$$E_t = E_1 + E_2 = E_{01}(\operatorname{Sen}\omega t \cos\alpha_1 + \cos\omega t \operatorname{Sen}\alpha_1) +$$
$$+ E_{02}(\operatorname{Sen}\omega t \cos\alpha_2 + \cos\omega t \operatorname{Sen}\alpha_2)$$

$$E_t = \overbrace{(E_{01}\cos\alpha_1 + E_{02}\cos\alpha_2)}^{E_0 \cos\alpha} \operatorname{Sen}\omega t +$$
$$+ \underbrace{(E_{01}\operatorname{Sen}\alpha_1 + E_{02}\operatorname{Sen}\alpha_2)}_{E_0 \operatorname{Sen}\alpha} \cos\omega t$$

Para obtermos a amplitude (E_0) podemos elevar ao quadrado:

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Para obtermos α podemos fazer:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{E_{01}\operatorname{Sen}\alpha_1 + E_{02}\operatorname{Sen}\alpha_2}{E_{01}\cos\alpha_1 + E_{02}\cos\alpha_2}$$

$$E_t = E_0 \cos\alpha \operatorname{Sen}\omega t + E_0 \operatorname{Sen}\alpha \cos\omega t$$
$$= E_0 \operatorname{Sen}(\omega t + \alpha)$$

Ou seja, o resultado da sobreposição entre duas ondas sinusoidais é ainda uma onda sinusoidal, com a mesma frequência mas com Amplitude e fase diferentes

Note que a amplitude não é simplesmente a soma das amplitudes! Sendo a densidade de fluxo (Irradiância) proporcional ao quadrado de E, então temos:

$$I_t = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}_{\text{Termo de Interferência}}$$

$\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ é a diferença de fase

$$\delta = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2)}_{\substack{\text{devido ao} \\ \text{percurso} \\ \text{óptico}}} + \underbrace{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}_{\substack{\text{diferença de} \\ \text{fase no} \\ \text{início}}}$$

Tomando apenas a parte relativa ao percurso óptico:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n (x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Lambda$$

Λ é exactamente a diferença de percursos ópticos
λ_0 é o comprimento de onda no vazio

Relativamente à diferença de fase inicial $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ é preciso ter em conta que essa diferença pode variar no tempo! No entanto, neste capítulo será sempre subentendido que essa diferença será constante, ou seja que as ondas são coerentes

Notem ainda que quando temos 2 ondas de igual amplitudes a soma delas pode ter amplitude superior à ~~soma delas~~ amplitude delas ou inferior

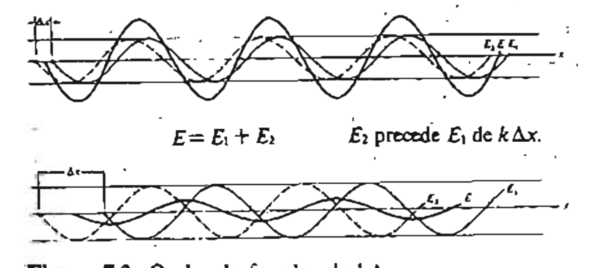


Figura 7.3 Ondas desfasadas de $k\Delta x$.

Interferência Construtiva

Interferência Destrutiva

Se em vez de termos 2 ondas tivermos N ondas, todas com a mesma freqüência, propagando-se na mesma direcção e coerentes, então o resultado é ainda uma onda harmónica com a mesma freqüência!

Ou seja, temos: $E = \sum_{i=1}^{N} E_{0i} \cos(\alpha_i \pm \omega t)$

e o resultado é: $E = E_0 \cos(\alpha \pm \omega t)$

em que: $$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2\sum_{j>1}^{N}\sum_{i=1}^{N} E_{0i}E_{0j}\cos(\alpha_i - \alpha_j)$$

e $$tg\,\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{0i}\,\mathrm{sen}\,\alpha_i}{\sum_{j=1}^{N} E_{0j}\cos\alpha_j}$$

~~Em Ver~~ Podemos escrever as mesmas soluções usando a representação complexa:

$$E_j = E_{0j}\, e^{i(\alpha_j \mp \omega t)}$$

$$E = \sum_{j=1}^{N}\left[E_{0j}\, e^{i(\alpha_j \mp \omega t)}\right]$$

$$= E_0\, e^{i(\alpha \mp \omega t)}$$

Donde resulta: $$E_0 e^{i\alpha} = \sum_{j=1}^{N} E_{0j}\cdot e^{i\alpha_j}$$

$$E_0 = \left(E_0 e^{i\alpha}\right)\underbrace{\left(E_0 e^{-i\alpha}\right)}_{(E_0 e^{i\alpha})^*}$$

A utilidade deste método é que é fácil obter a amplitude utilizando a representação gráfica.

[E_0 será o tamanho do vector e α o ângulo em relação ao eixo de referência (normalmente eixo xx)]

Ex. 7.6

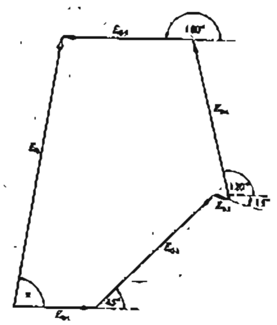


Figura 7.6 Soma de E_1, E_2, E_3, E_4 e E_5.

$E_1 = 5 \operatorname{sen} \omega t$

$E_2 = 10 \operatorname{sen}(\omega t + 45°)$

$E_3 = \operatorname{sen}(\omega t - 15°)$

$E_4 = 10 \operatorname{sen}(\omega t + 120°)$

$E_5 = 8 \operatorname{sen}(\omega t + 180°)$

→ Ondas Estacionárias

Até agora vimos o caso de termos 2 ondas que se propagam na mesma direcção (seja ela qual for).

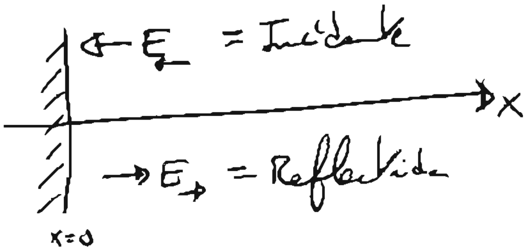
Vejamos agora o que acontece com 2 ondas com a mesma freqência que se propagam em sentidos opostos

$$E_{\rightarrow} = E_{0\rightarrow} \operatorname{sen}\left[kx - \omega t + \varepsilon_{\rightarrow}\right] \qquad E_{\leftarrow} = E_{0\leftarrow} \operatorname{sen}\left[kx + \omega t + \varepsilon_{\leftarrow}\right]$$

O resultado será naturalmente $E = E_{\rightarrow} + E_{\leftarrow}$

Mas antes de calcularmos esse resultado vamos simplificar o problema. Para começar vamos tomar $\varepsilon_{\leftarrow} = 0$ (porque podemos escolher o instante $t=0$ de tal modo que $\varepsilon_{\leftarrow} = 0$).

Imaginemos ainda que a onda que se dirige da direita para a esquerda incide num espelho em $x = 0$



Agora vamos que ~~...~~ pensar qual é a influência do espelho no nosso sistema: Quais são as <u>condições Fronteira</u>

As leis do electromagnetismo dizem que nestas condições (com o espelho) o campo total em $x=0$ deve ser 0.

Logo se tivermos $E_{0\to} = E_{0\leftarrow}$, para termos $E_t = 0$ isso implica que $E_{\to} = 0$ (pq como já dissemos $E_{\leftarrow} = 0$).

Então temos $E_t = E_{\leftarrow} + E_{\to}$

$$= E_{0\to}\,\text{Sen}\left[kx - \omega t\right] + E_{0\leftarrow}\,\text{Sen}\left[kx + \omega t\right]$$

$$= 2E_{0\leftarrow}\,\text{Sen}(kx)\cos(\omega t)$$

Esta é uma <u>onda estacionária!</u> Não é descrita por $f(x \pm vt)$! Há pontos cuja <u>amplitude</u> é sempre <u>nula</u>:

$x = 0;\ \frac{\lambda}{2};\ \frac{2\lambda}{2};\ \frac{3\lambda}{2};\ \ldots$ os <u>Nodos</u>

e pontos onde a amplitude atinge valores <u>máximos</u> (mas atenção que nesses pontos a amplitude depende do tempo!)

$x = \frac{\lambda}{4};\ \frac{3\lambda}{4};\ \frac{5\lambda}{4};\ \ldots$ <u>os Ventres</u>

Notemos ainda que para certos instantes $E_t = 0$ para todos os pontos, esses instantes correspondem a quando $\cos(\omega t) = 0$.

Fig. 7.7

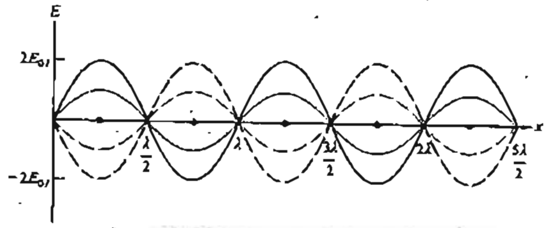


Figura 7.7 Uma onda estacionária em vários instantes.

Alguns alunos recordar-se-ão de ter visto este mesmo efeito com a corda vibrante, em Física I (Laboratórios).

→ Ondas com frequências distintas

• Batimentos

Vamos considerar agora 2 ondas c/ 2 frequências diferentes e fases idênticas (e por conveniência serão 0)

$$E_1 = E_{01} \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$E_2 = E_{02} \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Somando estas duas ondas

$$E_t = E_{01} \cos(k_1 x - \omega_1 t) + E_{02} \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$= 2E_{01} \cos\left[\frac{1}{2}\left([k_1 + k_2]x - [\omega_1 + \omega_2]t\right)\right] \times \cos\left[\frac{1}{2}\left([k_1 - k_2]x - [\omega_1 - \omega_2]t\right)\right]$$

Usando os valores médios da freqüência angular e do número de onda:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad \overline{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Por outro lado se definirmos a freqüência de modulação e o número de onda de modulação

$$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \qquad k_m = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

Logo: $$E_t = 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t) \cos(\overline{k} x - \overline{\omega} t)$$

Que pode ser escrita como:

$$E_t = \underbrace{E_0}_{E_0 = 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t)} \cdot \cos(\overline{k} x - \overline{\omega} t)$$

(Escrevemos assim porque como $\omega_1 \pm \omega_2$ ($\sim 10^{15}$) $\overline{\omega} >> \omega_m$)

Como E_0 varia com k_m e ω_m, e eles são muito mais pequenos, isso significa que a variação de E_0 é mais lenta quando comparada com a variação de $\overline{k}$ e $\overline{\omega}$.

$$I \propto E_0^2 = 4E_{01}^2 \cos^2[k_m x - \omega_m t]$$
$$= 2E_{01}^2 [1 + \cos(2k_m x - 2\omega_m t)]$$

Reparem que E_0^2 varia em torno de $2E_{01}^2$ com uma frequência angular $2\omega_m$ (ou seja $\omega_1 - \omega_2$), sendo essa chamada de frequência de batimento.

Notem que E_0 varia à frequência de modulação, ~~mas~~ a irradiância ($\propto E_0^2$) varia à frequência dupla (a fr. de batimento).

EH 7.9

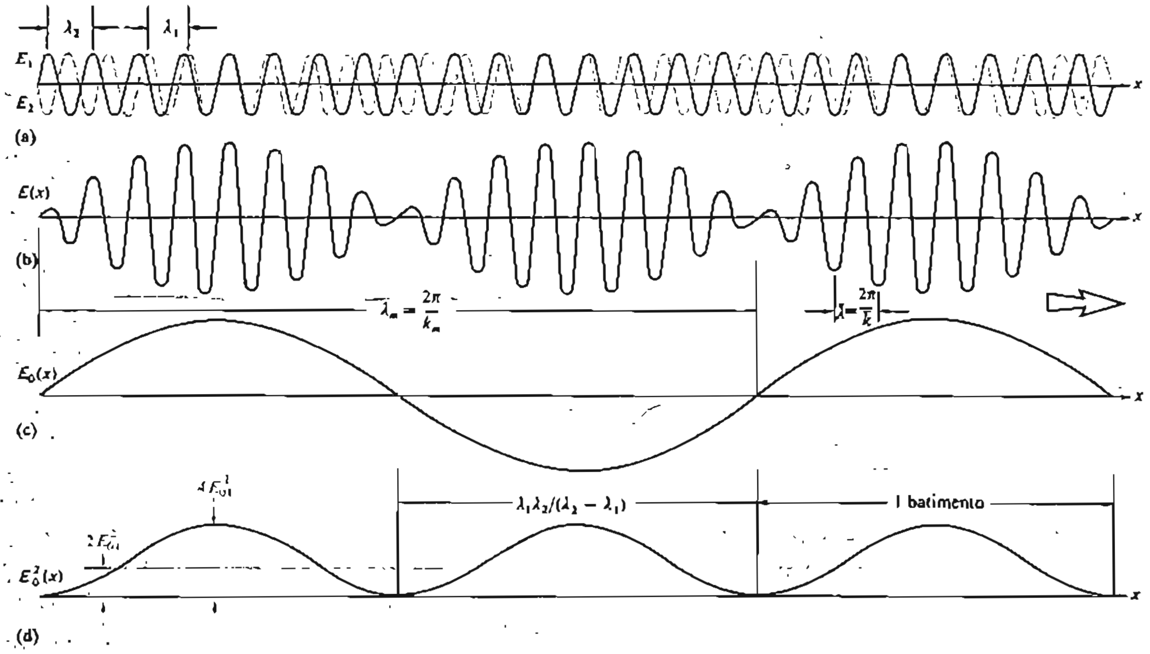


Figura 7.9 Sobreposição de duas ondas harmónicas com frequências diferentes.

Mas voltemos à expressão

$$E_t = E_0 \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

Podemos pensar nesta expressão como representando uma onda ~~óptica~~ de frequência ($\bar{\omega}$) cuja ~~frequência~~ Amplitude é modulada (neste caso por uma função $\cos(k_m x - \omega_m t)$).

Relembrando o que vimos quando falamos de <u>velocidade de fase</u>

$$v = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t}$$

e sabendo que neste caso a fase é $\varphi = (\bar{k}x - \bar{\omega}t)$

então é fácil concluir que: $v = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$

Mas agora temos também que considerar o que ocorre com os batimentos, que ~~ta~~ já vimos possuem uma freqüência diferente.

Sendo a amplitude $E_0(\cancel{x,t}) = 2E_{01}\cos(k_m x - \omega_m t)$

então é fácil concluir que esta modulação se propaga com uma velocidade:

$$v_g = \frac{\omega_m}{k_m}$$

que pode ser reescrita como $v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

Se tivermos em conta que $\Delta\omega \ll 1$ então podemos encarar a relação anterior como uma derivada:

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

E tenham em atenção que ω depende de K (ou seja do comprimento de onda).

A relação $\omega(K)$ [a variação de ω em função de K] é chamada de <u>relação de dispersão</u>.

Como $\omega = K v$

$$v_g = v + k \frac{dv}{dK}$$

Ou como ~~v_g~~ também sabemos: $\omega = \frac{Kc}{n}$

$$v_g = \frac{c}{n} - \frac{Kc}{n^2}\frac{dn}{dK}$$

$$v_g = v\left[1 - \frac{K}{n}\frac{dn}{dK}\right]$$

Dependendo do sinal desta derivada, v_g pode ser maior ou menor que v.

Se o meio for não dispersivo $\frac{dn}{dK} = 0$ e $v_g = v$

Num meio com dispersão normal $\frac{dn}{dK} > 0$ e $v_g < v$

[Mesmo que para um certo meio $v > c$, teremos sempre $v_g \leq c$ [Pq a energia não se pode propagar c/ uma velocidade superior a c]]

• Análise de Fourier

Vamos apenas falar dos princípios por trás desta análise, sem entrar em grandes detalhes:

O Teorema de Fourier estabelece que qualquer função periódica $f(x)$, de período λ, pode ser representada como a soma de funções harmónicas de comprimentos de onda iguais a submúltiplos inteiros de λ (ou seja: $\frac{\lambda}{1}$; $\frac{\lambda}{2}$; $\frac{\lambda}{3}$; ...)

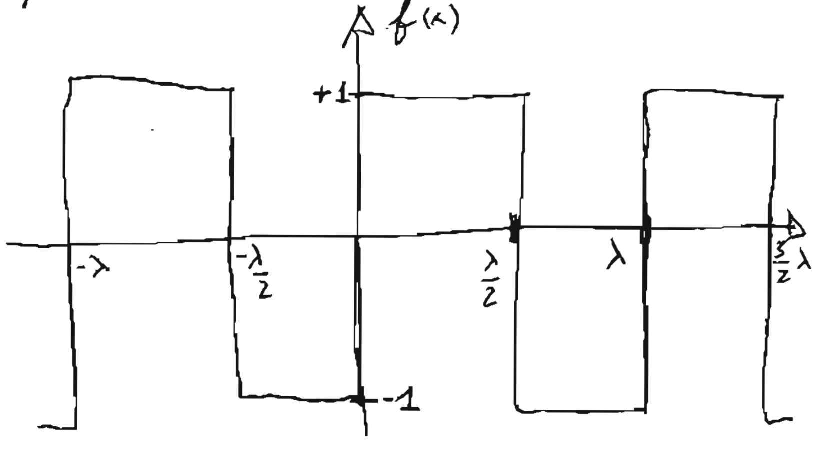
Ou seja se tivermos $f(x)$ periódica em λ, então:

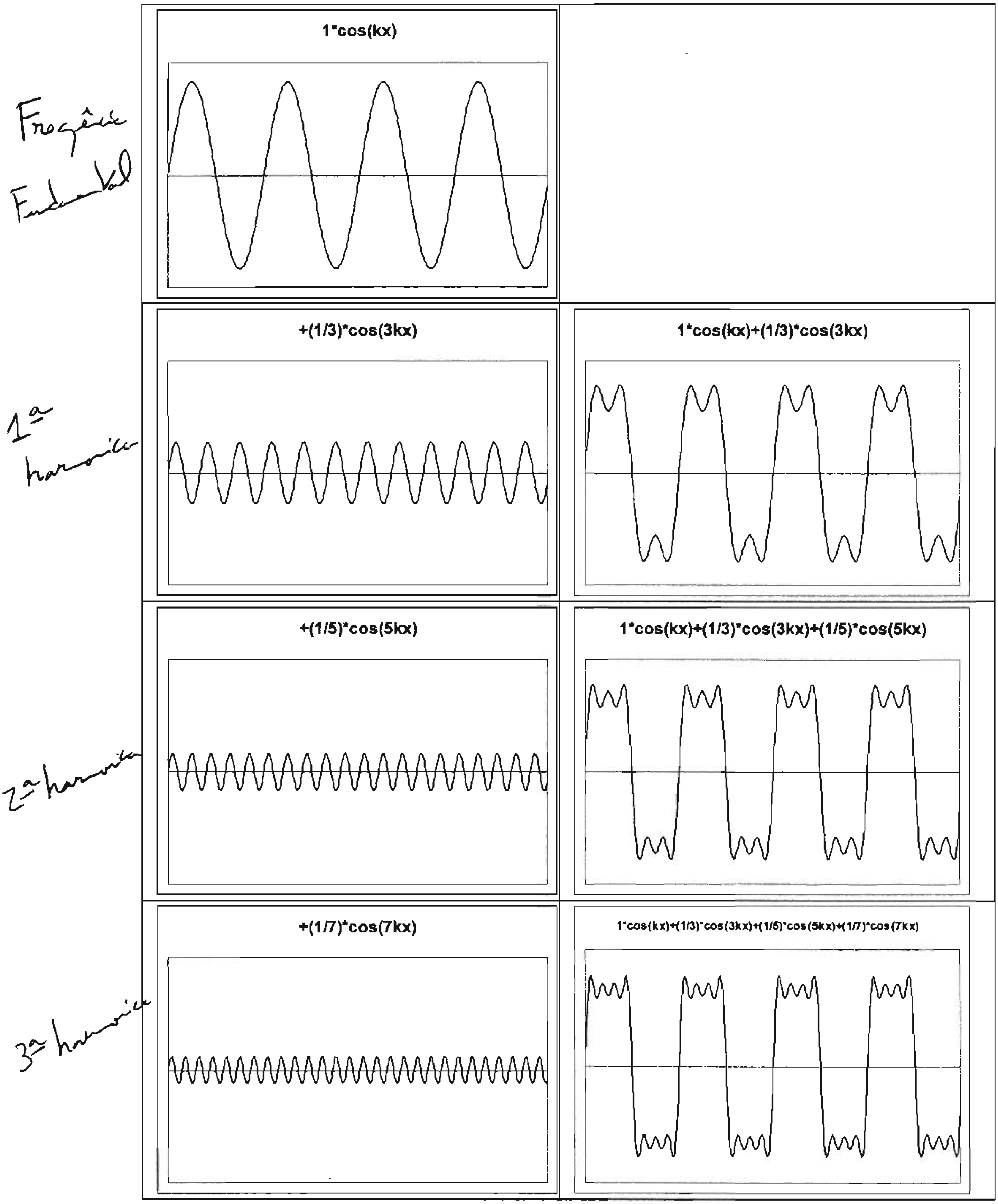
$$f(x) = C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{\lambda}{1}} x + \varepsilon_1\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{\lambda}{2}} x + \varepsilon_2\right) + \ldots$$

Vejamos 1 exemplo concreto:

Temos a função $f(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } 0 < x < \frac{\lambda}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{\lambda}{2} < x < \lambda \end{cases}$

(Função Quadrada)



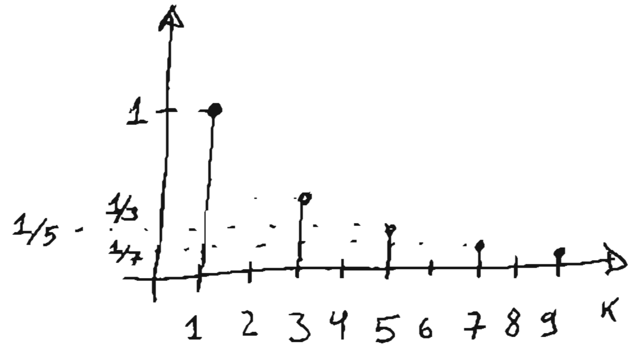


Ou seja $f(x) = 1\cos(kx) + \frac{1}{3}\cos(3kx) + \frac{1}{5}\cos(5kx) + \frac{1}{7}\cos(7kx) + \dots$

Se fizessemos essa soma, quantos mais termos incluirmos, mais nos aproximamos da onda quadrada.

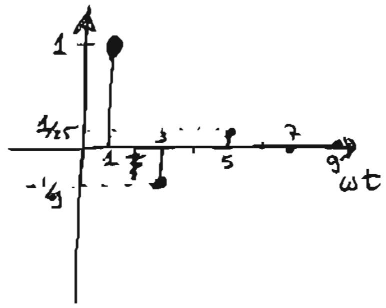
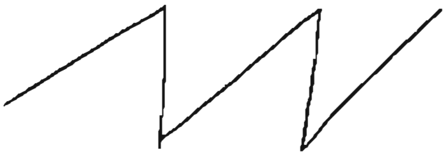
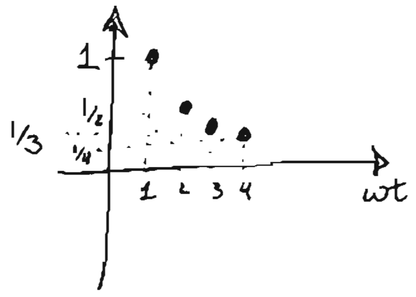
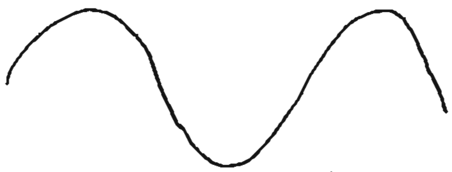
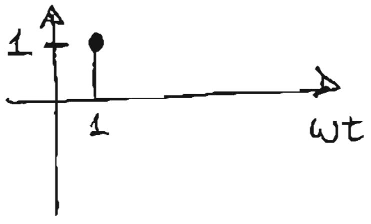
$K = \frac{2\pi}{\lambda}$, tal como anteriormente.

Se agora representarmos os coeficientes desses K's temos:



Este tipo de representação é o que se chama o espectro de frequências, ou seja, a amplitude de cada frequência.

Vejamos outros exemplos:

Onda	Somatório	Espectro
 Triangular	$1 \operatorname{Sen}(\omega t) - \frac{1}{9}\operatorname{Sen}(3\omega t) + \frac{1}{25}\operatorname{Sen}(5\omega t) - \frac{1}{49}\operatorname{Sen}(7\omega t) \dots$	
 Dente de Serra	$1 \operatorname{Sen}(\omega t) + \frac{1}{2}\operatorname{Sen}(2\omega t) + \frac{1}{3}\operatorname{Sen}(3\omega t) + \frac{1}{4}\operatorname{Sen}(4\omega t) \dots$	
 Sinusoidal	$1 \operatorname{Sen}(\omega t)$	

Notem que nestes últimos exemplos utilizei $\underline{\omega t}$ e não kx, mas qual é a diferença? Nenhuma!

Existe uma ~~simetria~~ analogia entre espaço e tempo:

	Espaço	Tempo
Período	λ	T
Frequência	$\frac{1}{\lambda}$	$f = \frac{1}{T}$
Frequência angular	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Mas voltando ao teorema de Fourier. De um modo geral temos então que para funções periódicas:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m k x) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen}(m k x)$$

em que
$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos(m k x)\, dx$$

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \operatorname{sen}(m k x)\, dx$$

Isto é válido para funções periódicas.

E para funções não periódicas?

Não vamos justificar aqui, mas espero que aceitem que a expressão anterior, com duas séries se transforma numa expressão com 2 somatórios:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\infty} A(k)\cos[kx]\,dk + \int_0^{\infty} B(k)\,\text{sen}[kx]\,dk\right]$$

Os coeficientes $A(k)$ e $B(k)$ são dados por:

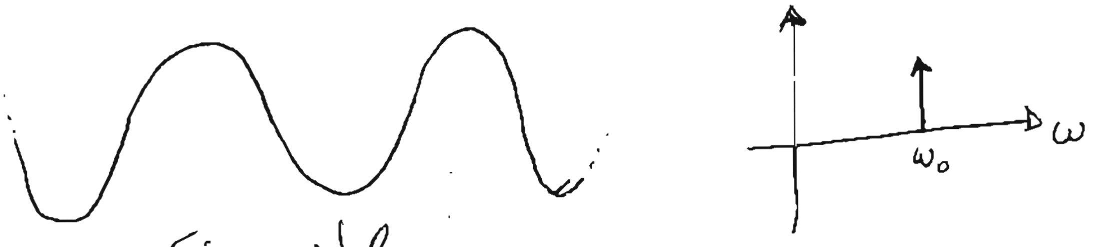
$$A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$B(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\text{sen}(kx)\,dx$$

Estes coeficientes são normalmente chamados de Transformadas de Fourier (em cosseno e seno)

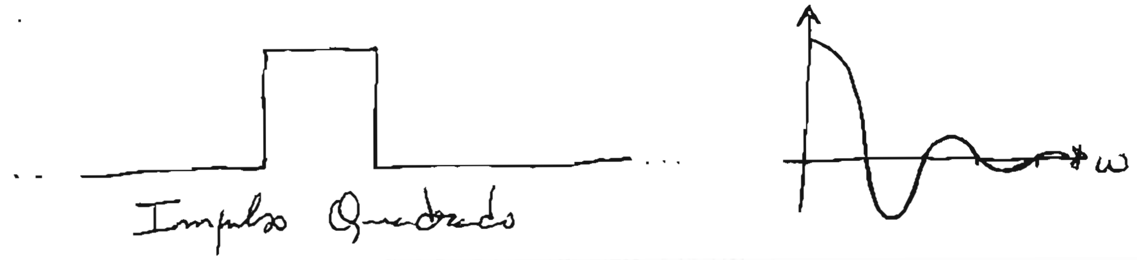
Vejamos alguns exemplos:

Onda Transformada



Sinusoidal

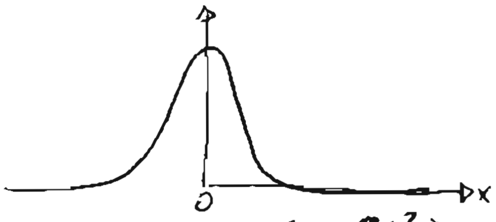
delta



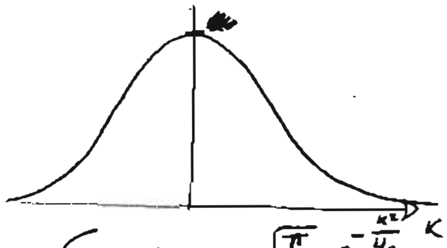
Impulso Quadrado

$\text{Sinc}(x) = \frac{\text{Sen}(x)}{x}$

Onda Transformada



Gaussiana (e^{-ax^2})



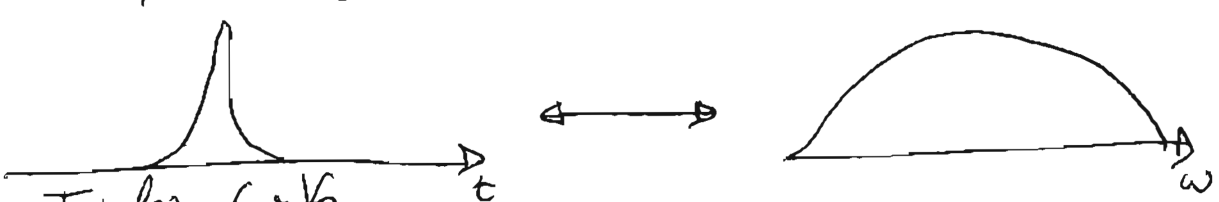
Gaussiana $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{k^2}{4a}}$

Ora agora pensemos no último exemplo mas nos tempos:

Ou seja para termos um impulso no tempo teremos que ter um conjunto de frequências! (Não é ~~dito~~ visível a partir do gráfico, mas quantas mais frequências estiverem presentes, mais curto será o impulso no tempo!)

tempo frequências

Impulso longo



Impulso curto

Naturalmente pode-se definir uma duração do impulso (Δt) e uma largura do espectro de frequências ($\Delta\omega$).

Existem várias definições (por exemplo largura total a meia altura, largura a e^{-1}, etc), pelo que não iremos entrar aqui em detalhes.

O importante é recordar que:

$$\Delta\omega \sim \frac{2\pi}{\Delta t}$$

Ou seja quanto maior for $\Delta\omega \Rightarrow$ menor Δt

$\Delta\omega$ menor $\Rightarrow$ maior Δt

Esse valor da largura do espectro ($\Delta\omega$) e o seu equivalente para o espaço (ΔK) são habitualmente chamados de <u>Largura de Banda</u>.