

# ÓPTICA

①

## CAP. 9 - INTERFERÊNCIA

Já falamos anteriormente de interferência, quando falamos do princípio da superposição. Vamos agora estudar este tema com mais detalhe.

Segundo o Princípio da Superposição: O campo eléctrico total  $\vec{E}_c$  em qualquer ponto do espaço (seja de duas ou mais ondas se sobrepõem) é igual à soma vectorial das ondas intervenientes.

Desta resultam a criação de um padrão cuja irradiância é diferente da soma das irradiâncias individuais.

Vamos estudar dois tipos de interferómetros: os de frente de onda, e os de divisão de amplitude. No primeiro caso ~~para~~ partes distintas de uma frente

de onda são feitos interferir. No caso do int. <sup>(2)</sup>  
 de difração de amplitude uma parte da frente de onda  
 é utilizada para gerar 2 frentes de onda secundárias  
 que dois interferem.

Mas antes de avançarmos vamos recordar algumas

leis:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

Se  $\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_1)$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_2)$$

(ou seja duas ondas planas de mesma  $\omega$  e com a  
 mesma frequência).

Já vimos que  $I = \epsilon v \langle \vec{E}^2 \rangle$

Como estão interessados em estudar os padrões de  
 interferência, ou seja as variações de  $I$ , vamos  
 vamos preocupar com as constantes  $\epsilon v$  e vamos escrever  
 simplesmente

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle$$

Como  $\vec{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$

ou  $I = I_1 + I_2 + 2I_{12}$

$$I_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$$

(3)

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \epsilon_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \epsilon_2)$$

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\delta)$$

Dif. de Fase  $\delta = (\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)$

Note que se  $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = 0$  (ou seja, se eles forem perpendiculares) então  $I_{12} = 0$ .

Se pelo contrário eles forem paralelos:

$$I_{12} = 2 E_{01} E_{02} \cos \delta$$

Então podemos escrever:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Logo  $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2}$  Interferência  
qdo  $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$  Construtiva

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

(4)  
Interferência  
De Young

qdo  $\delta = \pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \dots$

Se  $I_1 = I_2 = I_0 \rightarrow \begin{cases} I_{\max} = 4I_0 \\ I = 4I_0 \cos^2(\delta/2) \\ I_{\min} = 0 \end{cases}$

Veja-se agora outro caso, quando temos 2 fontes pontuais,  $S_1$  e  $S_2$  (placadas na mesma direção).

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  os raios das diferentes ondas esféricas:

$$E_1 = E_{01}(r) \cdot e^{i(kr_1 - \omega t + \epsilon_1)}$$

$$E_2 = E_{02}(r) \cdot e^{i(kr_2 - \omega t + \epsilon_2)}$$

$$\delta = (k[r_1 - r_2]) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

Se a separação entre as fontes for pequena, então podemos admitir que  $E_{01}(r) \approx E_{02}(r) \approx E_0$

$$I = 4I_0 \cos^2 \left[ \frac{1}{2} [k(r_1 - r_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)] \right]$$

Os máximos ocorre para

$$\delta = 2\pi m$$

ou seja:

$$(r_1 - r_2) = [2\pi m + (\epsilon_2 - \epsilon_1)] / k$$

e os mínimos:

$$(r_1 - r_2) = [\pi m' + (\epsilon_2 - \epsilon_1)] / k$$

Estas equações descrevem

hiperbóides de revolução,

representados na figura ao lado.

(na figura são representados os hiperbóides para os máximos).

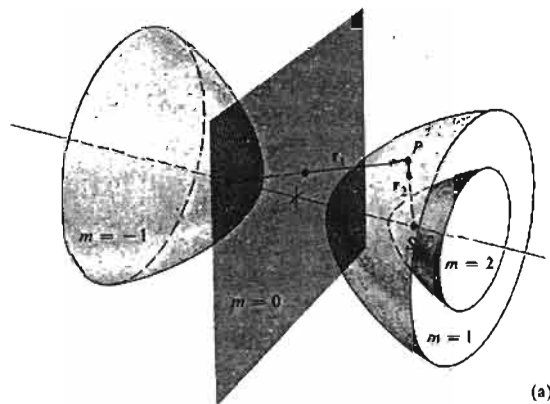
Ou seja, existem linhas ao longo das quais

a intensidade de <sup>porém de interferência</sup> ~~onda~~ será máxima. (e outras linhas onde será mínima).

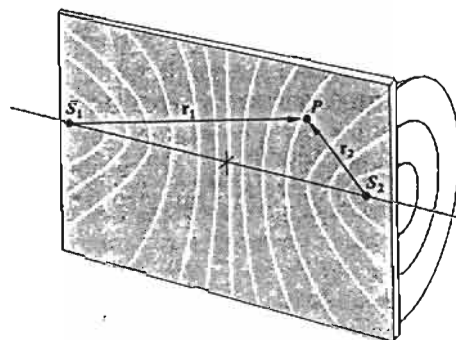
Essas zonas iluminadas (máximos) e zonas (mínimos)

constituem frangos de interferência.

São estes frangos que iremos ~~agora~~ estudar para alguns interferómetros.



(a)



(b)

Figura 9.3 Superfícies (hiperbóides) de irradiância máxima, geradas por duas fontes pontuais. Note-se que  $m$  é positivo sempre que  $r_1 > r_2$ .

6

Uma das condições para que duas fontes sejam vibráveis é que o termo  $(E_1 - E_2)$  seja constante (mesmo que não seja 0, desde que seja constante).

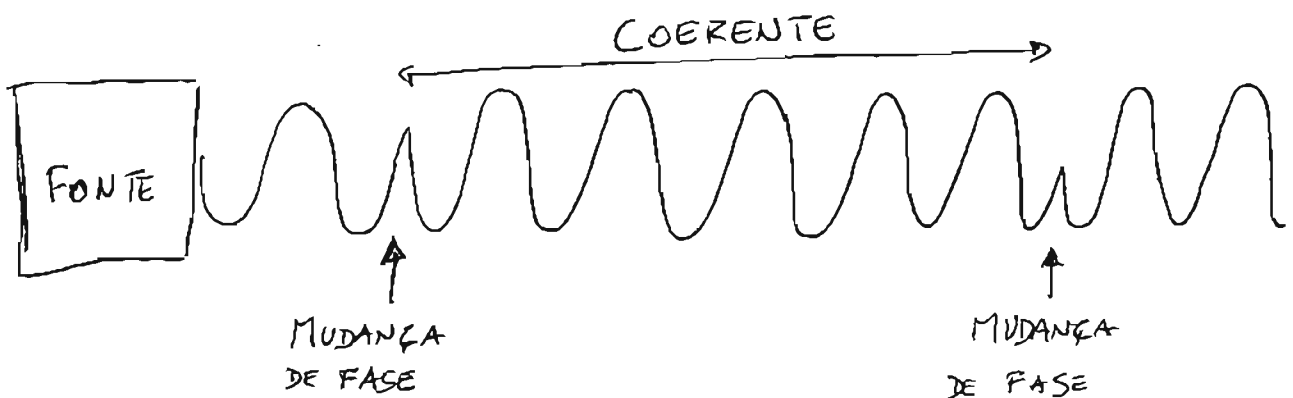
Fontes para as quais isso acontece chamam-se Fontes Coerentes (Mais tarde voltaremos a falar disto).

Podemos distinguir dois tipos de Coerência:

A Coerência temporal é uma medida do intervalo de tempo durante o qual a radiação emitida (por uma ou duas fontes) é coerente.

A Coerência Espacial é uma medida do espaço no qual a radiação é coerente.

Vejamos o caso de uma só fonte. Se a fase <sup>inicial</sup> da radiação emitida por essa fonte for constante durante



Os tempos de coerência / comprimentos de coerência dos <sup>(7)</sup> fontes convencionais (lâmpadas, sol, etc) são tão pequenos que não é possível observar os frangos de interferência!  
(A fase varia tão depressa que não se consegue ver nada).

Dá-se que normalmente se utilizam lasers nestas experiências, porque têm tempos/comprimentos de coerência muito elevados (da ordem dos milissegundos / quilómetros).

É pelo mesmo motivo que normalmente se usa apenas uma fonte, e não duas (As variações de fase entre duas fontes independentes são ainda mais frequentes que as variações entre de uma fonte apenas). Por isso utilizam-se interferómetros de divisão de amplitude e de divisão da frente de onda. (Para ser apenas 1 fonte).

Além disso, é necessário que os campos sejam paralelos! Se os vectores campo eléctrico forem perpendiculares, mesmo que sejam coerentes, não interferem!

Resumindo:

Para duas feixes interferirem:

(8)

— Têm que ser coerentes.

— Têm que ter o mesmo estado de polarização (ou pelo menos o estado de decomposição entre componentes segundo o eixo de polarização do outro).

Em geral iremos assumir que os campos são de facto paralelos, e por isso poderemos utilizar a teoria puramente escalar.

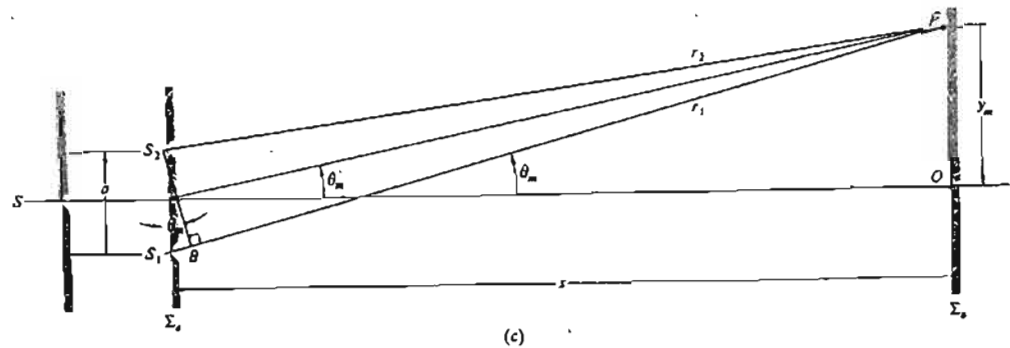
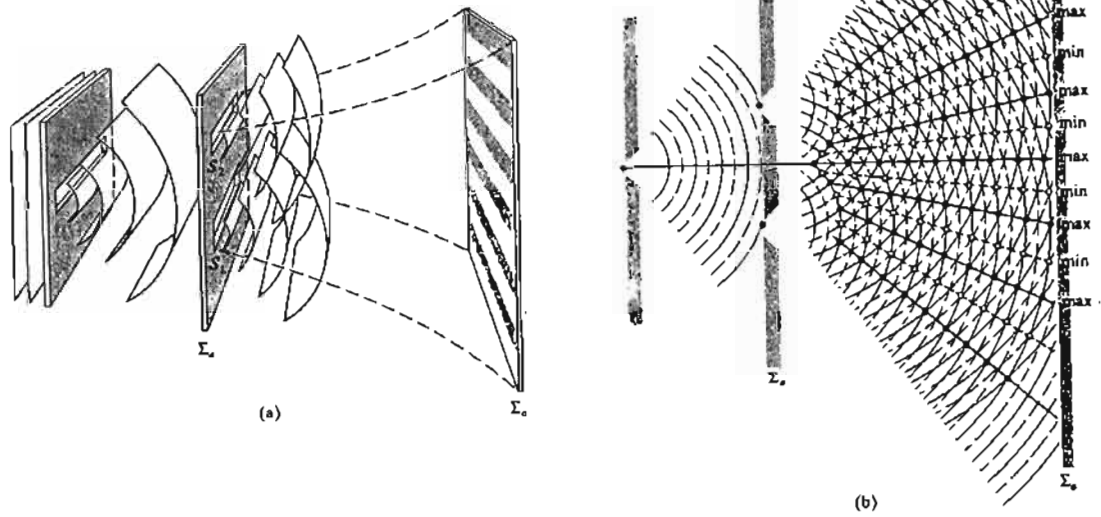
## — Interferómetros de Divisão de Frente de Onda

O exemplo mais conhecido deste tipo de interferómetro é a experiência de Young: 2 fendas estreitas colocadas em frente a uma fonte de ondas paralelas.

Nesta situação cada fenda funciona como uma fonte de ondas secundárias coerentes. Assim, no alvo, em frente às fendas vamos observar um padrão de interferências!



Figura 9.5 Experiência de Young (a). Sobreposição de ondas cilíndricas (b). Sobreposição de ondas, com zonas de interferência construtiva e destrutiva assinaladas (c). Geometria da experiência de Young (d). Uma diferença entre percursos de um comprimento de onda corresponde a  $m \equiv \pm 1$  e a um máximo de primeira ordem



Utilizando a notação da última figura, podemos

escrever:

$$\overline{S_1B} = r_1 - r_2$$

$$r_1 - r_2 = a \theta$$

e como  $\sin \theta \approx \theta$      $\theta \approx \frac{y}{r}$

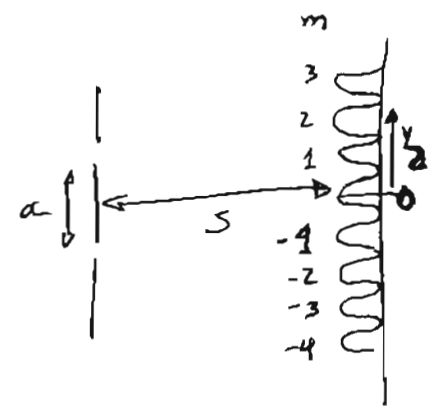
$$r_1 - r_2 = a \frac{y}{r}$$

Se  $\kappa(r_2 - r_1) = m2\pi$  Temos int. construtiva (Luz)

Se  $\kappa(r_1 - r_2) = m2\pi + \pi$  Temos int. destrutiva (escuro).

Para as franjas brilhantes:

$$r_1 - r_2 = \lambda m = \frac{a}{s} y$$



então  $\rightarrow$  máximos estão em  $y_m = \frac{s}{a} \cdot \lambda \cdot m$

em que m se diz que é a ordem do máximo.

Logo o espaçamento entre dois máximos ~~consecutivos~~ consecutivos é:

$$\Delta y = \frac{s}{a} \lambda$$

Se quisermos, podemos reescrever a expressão de máximos li porco:

$$I = 4I_0 \cos^2(\delta/2)$$

em que  $\delta = \kappa(r_1 - r_2)$

$$I = 4I_0 \cos^2 \left[ \frac{y a \pi}{s \lambda} \right]$$

De notar que não se teve em conta um dado muito importante: a largura dos fendas. Esse facto só será considerado quando falarmos das difracções.

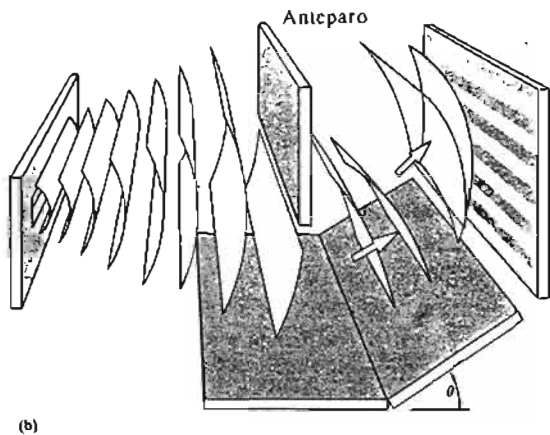
Por outro lado aditivamos que, pelo menos na distância  $r_1 - r_2$ , que a fonte é coerente.

Repara que o espaçamento entre os frangos depende do comprimento de onda. Então se fizerem esta experiência com luz branca (e coerente), o que irão observar?

Irá observar uma mistura de padrões (um para cada comprimento de onda) com espaçamentos diferentes entre os máximos. O que equivale a dizer que provavelmente não vão conseguir ver nada, porque os padrões vão estar todos sobrepostos.

Este tipo de experiência é conhecida por experiência de ~~Robert~~ Young. Outras experiências deste tipo são o espelho de Fresnel e o biprisma de Fresnel (os padrões são idênticos).

9.9.

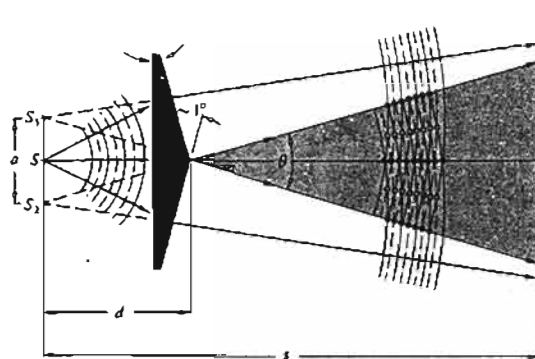


(b)

Figura 9.9 Espelho duplo de Fresnel.

9.10

12



(a)

Figura 9.10 Biprisma de Fresnel.

Em ambos os casos podem ver estes sistemas como sistemas com 2 fendas "virtuais".

Também o espelho de Lloyd pode ser visto como uma experiência de Young.

9.11

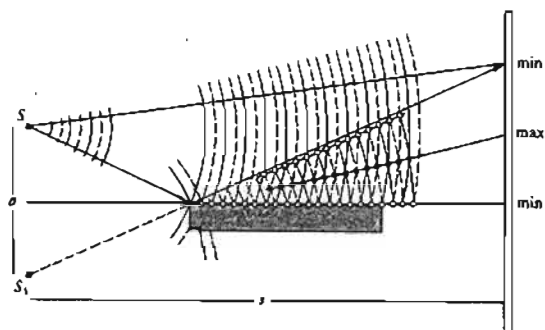


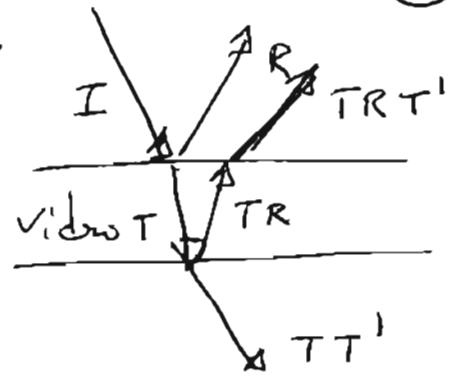
Figura 9.11 Espelho de Lloyd.

→ Interferômetros de Divisão de Amplitude

Existem várias situações em que a mesma frente de onda pode ser dividida em 2 (ou mais), por exemplo qto é refletida e transmitida ao

ao incidir numa placa de vidro.

Na realidade, esta situação é muito frequente, daí a importância do ser estudo.



9.14

Filmes dielétricos  
(FRANJAS DE IGUAL INCLINAÇÃO)

Considerando um filme de espessura  $d$  (e sem perdas) e índice ( $n_f$ ). Temos à saída raios reflectidos paralelos, que podem ser focados num ponto com o auxílio de uma lente.

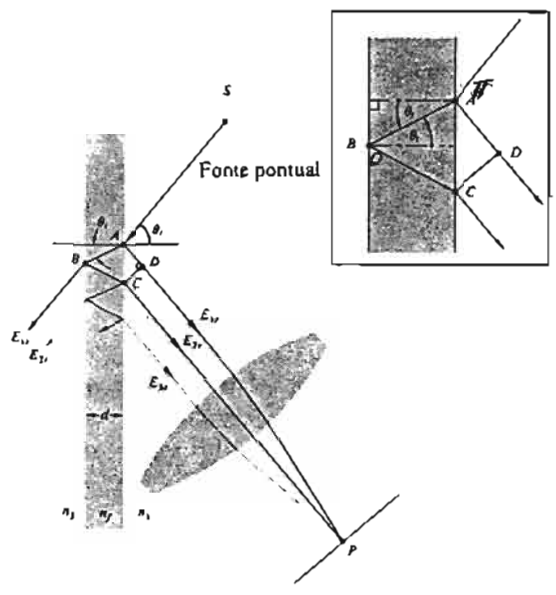


Figura 9.14 Franjas de igual inclinação.

A diferença entre os caminhos ópticos será:

$$\Delta = n_f [\overline{AB} + \overline{BC}] - n_1 \overline{AD}$$

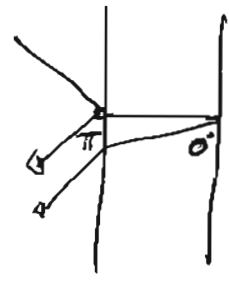
Como  $\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{d}{\cos \theta_c}$

$$\Delta = \frac{2n_f d}{\cos \theta_c} - n_1 \overline{AD}$$

finalmente:

$$\Delta = 2 n_f d \cos \theta_t$$

Mas agora temos que ter atenção a — detalhe:  
 Quando a luz é refletida na interface ar-vidro ocorre — desvio de fase de  $180^\circ$ . Tal desvio não ocorre quando a reflexão é na interface vidro-ar.



Logo a diferença de fase total:

$$\delta = k_0 \Delta + \pi$$

Os máximos ocorrem para  $\delta = 2\pi m$ , logo:

$$d \cos \theta_t = (2m + 1) \frac{\lambda_f}{4}$$

$$\left( \lambda_f = \frac{\lambda_0}{n_f} \right)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Outra coisa, o ângulo  $\theta_t$  define — ~~uma inclinação~~ uma inclinação para a qual se obtém — máximos, daí o nome de Franjas de igual inclinação

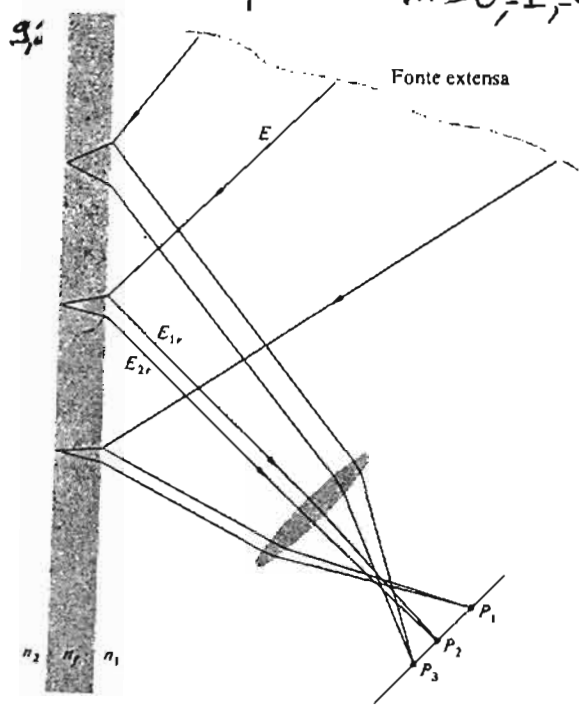


Figura 9.16 Franjas observadas sobre a quase totalidade do filme

Existem outros casos em que a espessura e não o ângulo ~~é~~ determinante. Nesse caso fala-se de franjas de igual espessura.

Por exemplo as franjas de Fizeau (que são aqui ao lado), e que a altura da cunha é:

$$d = x \alpha$$

os máximos estão em:

$$(m + \frac{1}{2}) \lambda_0 = 2 n_f d_{max}$$

escrevendo a função de  $x$  e não de  $d$ , e como  $\lambda_0 = n_f \lambda_f$

$$x_m = \left( \frac{m + \frac{1}{2}}{2 \alpha} \right) \lambda_f$$

A separação é:  $\Delta x = \frac{\lambda_f}{2 \alpha}$

e tb poderi escrever:  $d_m = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_f}{2}$

Um outro exemplo de franjas de igual espessura

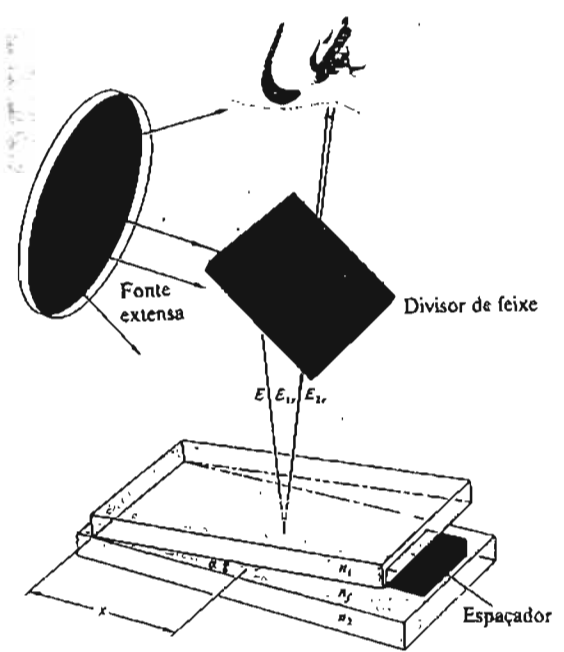


Figura 9.19 Franjas produzidas por um filme em forma de cunha.

# Os Anéis de Newton.

9.23

16

Neste caso, o raio das franjas onde se encontram os máximos são dados por:

$$X_m = \sqrt{m \lambda_f R}$$

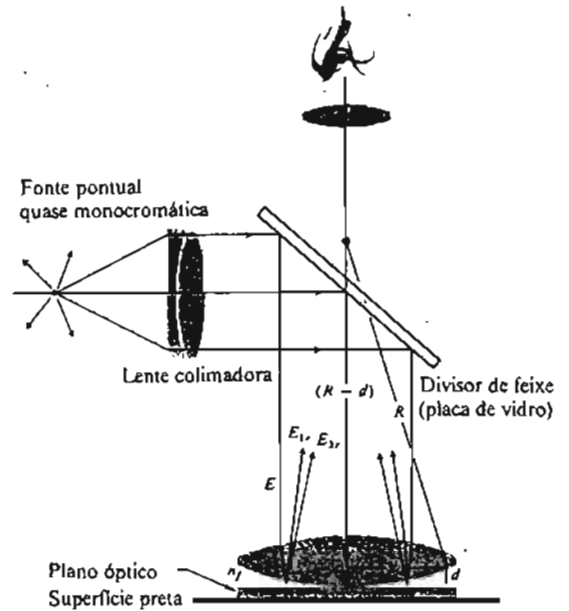


Figura 9.23 Geometria para observação dos anéis de Newton.

Mas mais interessantes são os

## Interferências com Espelhos

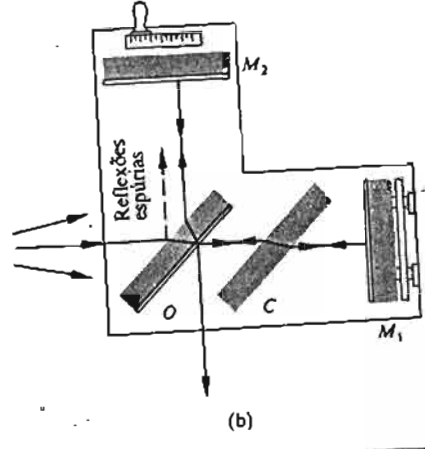
Imensos interferômetros utilizam espelhos e ~~os~~ divisores de feixe para dividir parte da amplitude da frente de onda.

O mais conhecido é o Int. de Michelson.

Nesse interferômetro a onda é dividida em dois feixes perpendiculares que depois são refletidos e se voltam a combinar no divisor.



A lâmina C é colocada apenas para compensar o facto do outro feixe atravessar 3 vezes o divisor de feixe, e esse feixe só atravessar 1 vez. Muitas



vezes, em particular qdo se utilizam lasers como fontes ópticas, não se inclui essa lâmina.

9.25b)

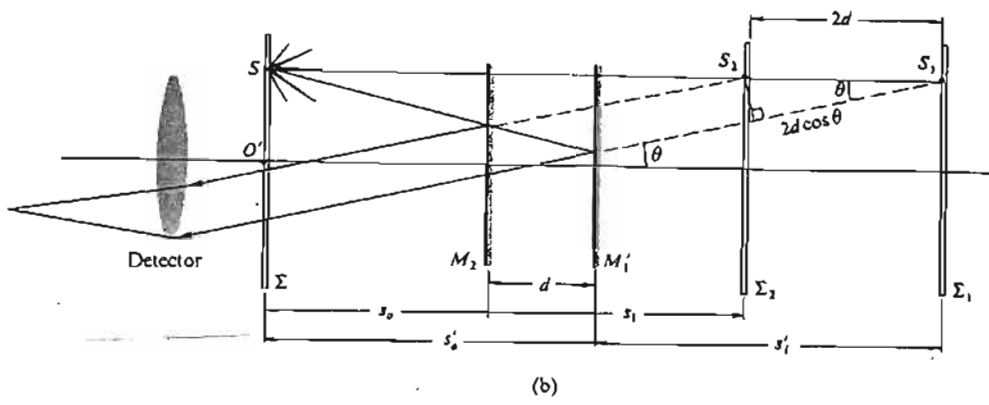


Figura 9.25 Rearranjo conceptual do interferómetro de Michelson.

Olhando para figura anterior podemos escrever que a diferença de percursos ópticos será:

$$\Delta = 2d \cos \theta_m$$

A diferença de fase total será:

$$\delta = k_0 \Delta + \pi$$

↖ devido à reflexão no divisor de feixe

Logo a interferência destrutiva vai ocorrer para:

$$2d \cos \theta_m = m \lambda_0$$

em q  $m$  é um número inteiro.

Ou seja ~~será~~ observar uma série de anéis alternadamente claros e escuros, com os ~~ângulos~~ ângulos dos anéis escuros dados pela expressão em cima.

Na realidade, através da inclinação dos espelhos é possível obter franjas circulares, retilíneas ou elípticas, parabólicas ou hiperbólicas

Nota-se que este interferômetro permite medir deslocamentos muito pequenos, p<sup>o</sup> sempre q  $d$  se altera de  $\frac{\lambda}{2}$  uma franja desloca-se <sup>para o local da</sup> ~~para o local da~~ a franja adjacente. Medindo com variação da luz

(imagem, tá iluminado, fica escuro, volta a ficar iluminado), consegue-se medir distâncias muito pequenas.

Um outro interferômetro é o de

9.27

19

## Mach - Zehnder

em que os dois feixes são recombinaos depois de dois percursos distintos.

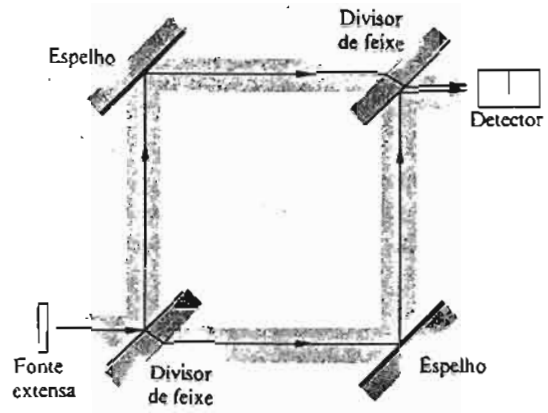
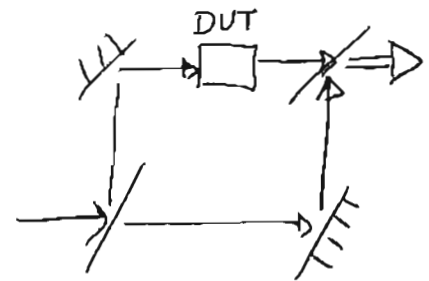


Figura 9.27 Interferômetro de Mach-Zehnder

Este interferômetro é extremamente útil pois através da introdução de uma célula em um dos braços do interferômetro pode-se medir facilmente a perturbação provocada por essa célula.



DUT → DEVICE UNDER TEST

(Por exemplo determinar o índice de refração do líquido no interior, se substituirmos o ramo da célula, etc.)

Um outro int. é o de Sagnac

9.32

Neste caso os dois feixes percorrem o mesmo percurso, mas em sentidos diferentes.

Este interferômetro é particularmente útil para medir rotações (giroscópios)

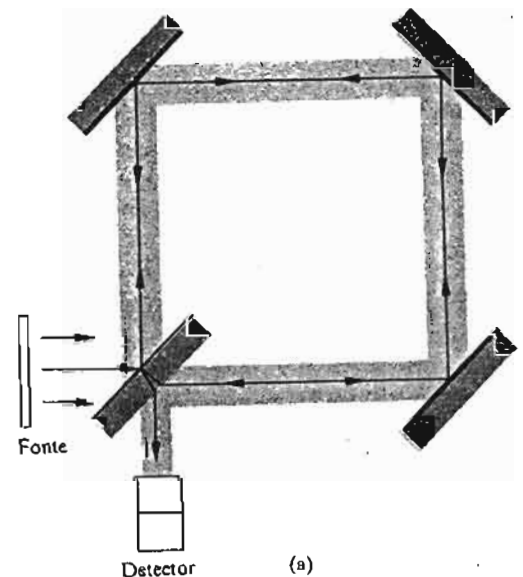


Figura 9.32 (a) Interferômetro de Sagnac.

De um modo simples, podemos escrever que se o int. estiver a rodar  $\omega$  com velocidade angular  $\omega$  (velocidade linear =  $\omega R$ )

então o tempo para a luz chegar de A para B será:

$$t_{AB} = \frac{2R}{\sqrt{2}c - \omega R}$$

e de A para D

$$t_{AD} = \frac{2R}{\sqrt{2}c + \omega R}$$

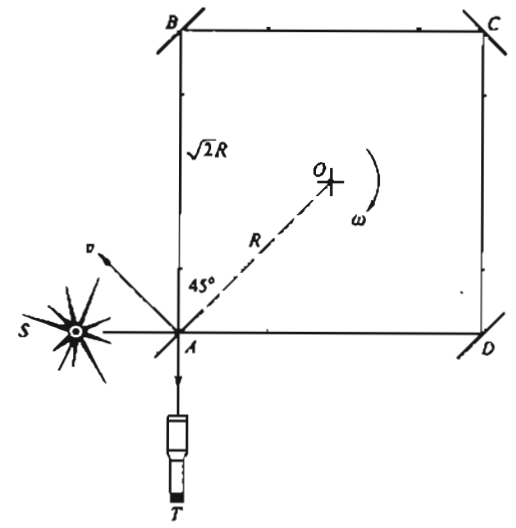


Figura 9.71 Interferómetro de Sagnac em rotação. Na versão original, as dimensões eram 1 m x 1 m e  $\omega = 120$  rev/min.

Logo

$$t_B = \frac{8R}{\sqrt{2}c - \omega R}$$

$$t_D = \frac{8R}{\sqrt{2}c + \omega R}$$

e a diferença  $\Delta t \approx \frac{8R^2 \omega}{c^2}$

Seja Sendo  $\tau$  o período da radiação ( $\tau = \frac{\lambda}{c}$ ) então podemos escrever a diferença de fase como  $\delta = \omega \Delta t$

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta t}{\tau}$$

ou seja medindo as franjas (a fase) consegue-se medir a velocidade de rotação.

$$\delta = \left( \frac{2\pi 8R^2}{c^2} \right) \omega$$

# → Interferência de Feixes Múltiplos

9.40

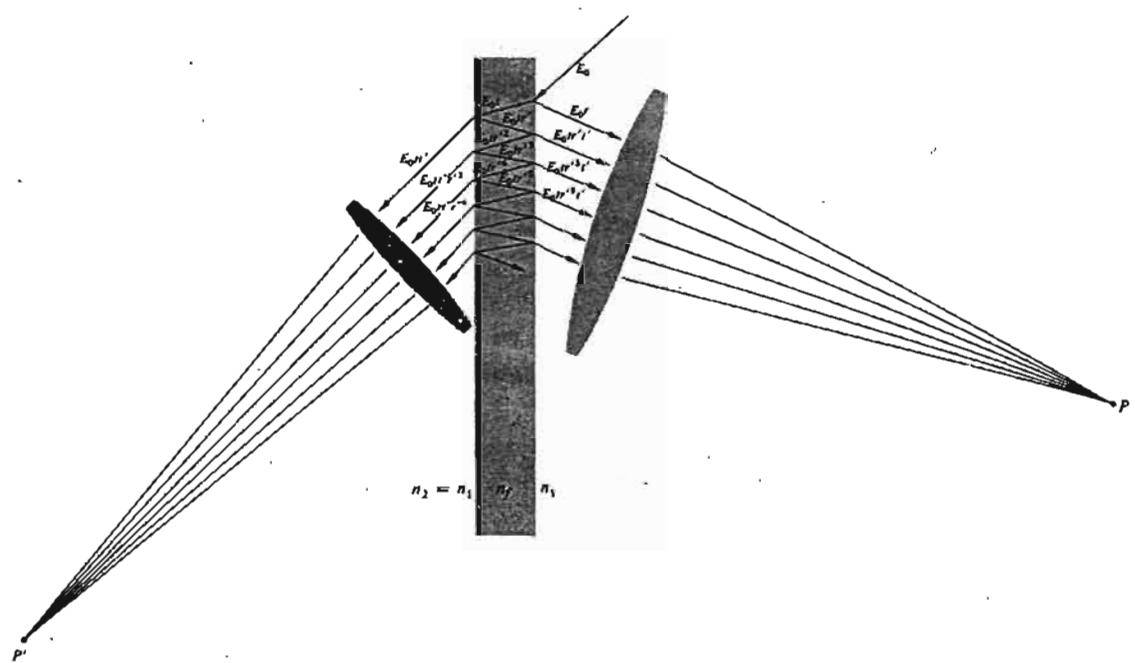


Figura 9.40 Interferência de feixes múltiplos numa lâmina de faces paralelas.

Vamos considerar que  $n_1 = n_2$  e que

$t$  é o coef. transmitido ar  $\rightarrow$  vidro

$t'$  é o coef. transmitido vidro  $\rightarrow$  ar

$r$  é o coef. de reflexão na interface ar  $\rightarrow$  vidro

$r'$  é o coef. de reflexão na interface vidro  $\rightarrow$  ar

Utilizando o tratamento escalar (admitindo que

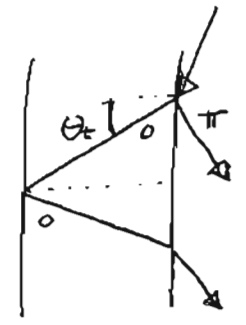
os campos elétricos de todos os ondas são paralelos),

teremos como ondas refletidas:

$$\begin{array}{ccc}
 E_0 r & / & E_0 t r' t' & / & E_0 t r'^3 t' & / & \dots \\
 1^a & & 2^a & & 3^a & & 
 \end{array}$$

recordando as leis de Fresnel  $r' = -r$   
(ou seja, há uma diferença de fase de  $\pi$ ).

Por outro lado, a diferença de percurso óptico entre feixes adjacentes é:  
 $\Delta = 2 n_f d \cos \theta_t$



(note que na reflexão interna ~~há~~ há variação da fase)

Vejam agora 2 casos particulares:

a)  $\Delta = m \lambda$

Então todas as ondas, exceto a primeira está em fase (a primeira sofre o desvio de  $\pi$ )  
(isto está implícito em  $r' = -r$ )

$$E_{\text{refl.}} = E_0 r - [E_0 r t t' + E_0 r^3 t t' + E_0 r^5 t t' + \dots]$$
$$= E_0 r - [E_0 r t t' (1 + r^2 + r^4 + \dots)]$$

Esta série converge (qdo  $r^2 \ll 1$ ) para

$$E_{\text{refl.}} = E_0 r - \left[ \frac{E_0 r t t'}{(1 - r^2)} \right]$$

Como se sabe que  $tt' = 1 - r^2$

$$E_{total} = E_0 r - \frac{E_0 r (1 - r^2)}{(1 - r^2)}$$

$$E_{total} = 0 !!$$

Não tem luz refletida. (qdo  $\Delta = m \lambda$ )

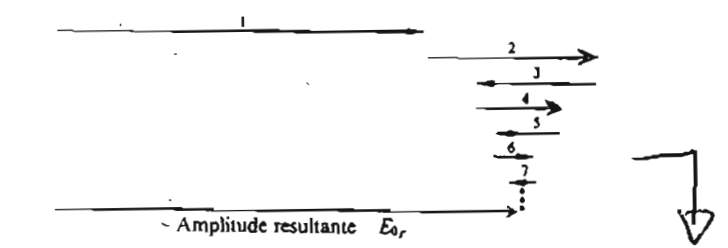
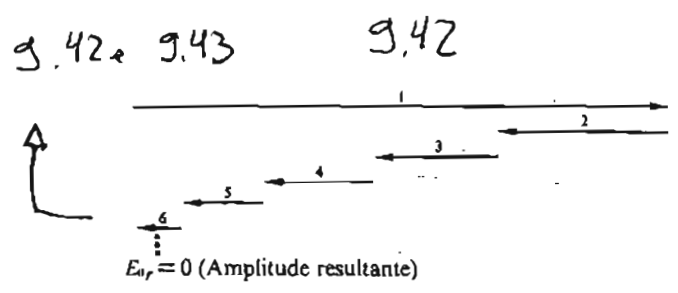


Figura 9.42 Diagrama de amplitudes complexas.

Figura 9.43 Diagrama de amplitudes complexas

b) e quando  $\Delta = (m + \frac{1}{2}) \lambda$

ou seja o 1º e o segundo estão em fase, e todos os outros estão alternadamente em fase e oposição.

$$E_{total} = E_0 r + E_0 t r t' + E_0 t r^3 t' + E_0 t r^5 t' + \dots$$

$$= E_0 r + E_0 r t t' (1 - r^2 + r^4 - r^6 + \dots)$$

$$= E_0 r + E_0 r t t' \left[ \frac{1}{1 + r^2} \right]$$

que se pode escrever  $(tt' = 1 - r^2)$

$$E_{total} = \frac{2r}{(1 + r^2)} E_0 \quad I_{total} = \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2} \left( \frac{E_0}{2} \right)^2$$

Veja agora o caso geral:

$\Delta$  é qualquer! definindo  $\delta = k_0 \Delta$

teremos as ondas sucessivas desfasadas  $\delta, 2\delta, 3\delta, 4\delta, \dots$

$$E_{1r} = E_0 r e^{i\omega t}$$

$$E_{2r} = E_0 t r' t' e^{i(\omega t - \delta)}$$

$$E_{3r} = E_0 t r'^3 t' e^{i(\omega t - 2\delta)}$$

⋮

$$E_{Nr} = E_0 t r'^{(2N-3)} t' e^{i(\omega t - (N-1)\delta)}$$

Somando:

$$E_{total} = E_0 e^{i\omega t} \left\{ r + r' t t' e^{-i\delta} \left[ 1 + (r'^2 e^{-i\delta}) + (r'^2 e^{-i\delta})^2 + \dots + (r'^2 e^{-i\delta})^{N-2} \right] \right\}$$

$$= E_0 e^{i\omega t} \left[ r + \frac{r' t t' e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right]$$

Usando novamente  $r' = -r$  e  $t t' = 1 - r^2$

$$E_{total} = E_0 e^{i\omega t} \left[ \frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right]$$



Sabemos que  $I = E \cdot E^*$

$$I_{\text{refletida}} = \frac{E_0^2 r^2 (1 - e^{-i\delta})(1 - e^{+i\delta})}{2 (1 - r^2 e^{-i\delta})(1 - r^2 e^{+i\delta})}$$

$$I_{\text{refletida}} = I_i \frac{2r^2(1 - \cos\delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos\delta}$$

em que  $I_i = \frac{E_0^2}{2}$  é a irradiância incidente

Fazendo o mesmo tipo de análise para as ondas transmitidas, chega-se a:

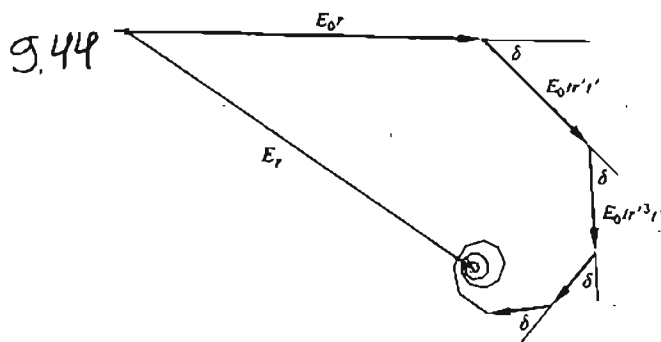


Figura 9.44 Diagrama de amplitudes complexas.

$$I_{\text{trans}} = \frac{1}{1 + \left[ \frac{2r}{(1-r^2)} \text{Sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \right]^2} I_i$$

$$I_{\text{refl}} = \frac{\left[ \frac{2r}{(1-r^2)} \text{Sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \right]^2}{1 + \left[ \frac{2r}{(1-r^2)} \text{Sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \right]^2} I_i$$

Note que  $I_i = I_{\text{trans}} + I_{\text{refl}}$  (ou seja, não há perdas!)

voltemos a ver os casos de há pouco:

a) Quando  $\delta = 2\pi m$  ( $\Delta = m\lambda$ )

$$\begin{cases} I_{refl} = 0 \\ I_{trans} = I_i \end{cases}$$

b) Quando  $\delta = (2m+1)\pi$  ( $\Delta = (m + \frac{1}{2})\lambda$ )

$$\begin{cases} I_{refletada} = I_i \left( \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \right) \\ I_{transmitida} = I_i \left( \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2} \right) \end{cases}$$

Voltando ao caso geral:

Para facilitar a escrita destas equações define-se

~~o coeficiente de reflexão~~ o coeficiente de Finesse

$$F = \left( \frac{2r}{1-r^2} \right)^2$$

$$\frac{I_{refletada}}{I_{incidente}} = \frac{F \text{ Sen}^2(\delta/2)}{1 + F \text{ Sen}^2(\delta/2)}$$

$$\frac{I_{transmitida}}{I_{incidente}} = \frac{1}{1 + F \text{ Sen}^2(\delta/2)} = \mathcal{A}(\delta)$$

este último termo é chamado fator de Airy

à direita tem o comportamento  
 dessa função para diferentes valores  
 de  $\delta$ .

9.45

(27)

Quando  $\frac{\delta}{2} = m\pi$   $A = 1$

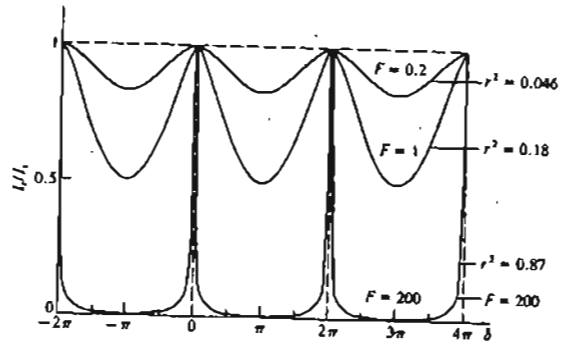
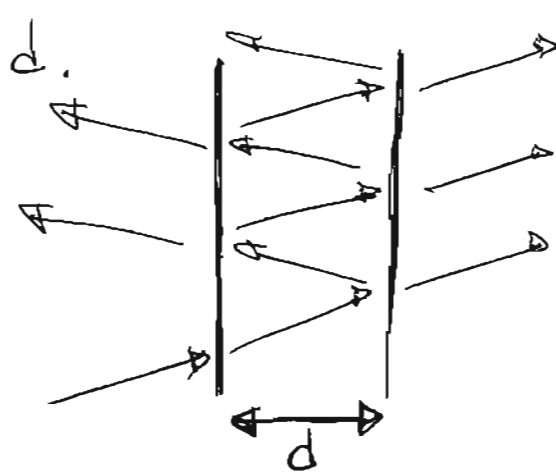


Figura 9.45 Função de Airy.

Note-se que neste caso tem  $N$  feixes a combinação...  
 Quando tem os dois (Exp de Young) tem uma  
 variação sinusoidal. Agora não!

Vejamos agora um dispositivo muito utilizado  
 o Étalon de Fabry - Perot

Consiste essencialmente em dois ~~espelhos~~ planos paralelos  
 as superfícies bem refletoras,  
 separados por uma distância



Como facilmente se  
 percebe, este caso é idêntico  
 ao que estivermos a considerar.

Usando  $R$  e  $T$  em vez de  $r^2$  e  $t \cdot t'$   $\left( \begin{matrix} R = r^2 \\ T = t \cdot t' \end{matrix} \right)$

e adicionando que esses espelhos tenham uma absorvância  $A$  (as perdas nos espelhos)

(28)

$$R + T + A = 1$$

Então as expressões anteriores tornam-se em:

$$\frac{I_t}{I_i} = \left[ 1 - \frac{A}{1-R} \right]^2 A(\delta)$$

(que é igual à expressão anterior qdo  $A = 0$ )

teremos então uma transmissão máxima:  $\left( \frac{I_t}{I_i} \right)_{\max} = \left[ 1 - \frac{A}{1-R} \right]^2$

essa distribuição continuará a ser do tipo:

$$\left( \frac{I_t}{I_{t\max}} \right) = A(\delta) = \frac{1}{1 + F \text{Sen}^2(\delta/2)}$$

Definindo a meia largura a meia altura:

$$A(\delta_{1/2}) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1/2} &= 2 \text{Sen}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{F}} \right) \\ &= 2 \text{arcSen} \left( \frac{1}{\sqrt{F}} \right) \end{aligned}$$

que normalizada (com  $F \gg 1$ ) pode ser aproximada (29)  
 por  $\delta_{1/2} \approx 2 \frac{1}{\sqrt{F}}$ , logo a largura total a meia  
 altura será:

$$\gamma = \frac{4}{\sqrt{F}}$$

(Recorde-se que  $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ , logo

Quanto maior for  $F$  mais  
 estreitos serão os picos).

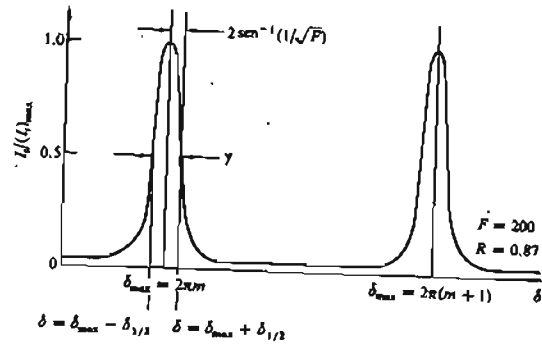


Figura 9.49 Franjas de Fabry — Perot.

A razão entre a aproximação entre os picos e a largura  
 a meia altura chama-se Finesse

$$F = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}$$

E agora, para que é que isto serve??

Para espectroscopia (por exemplo).

Como vimos  $I_e$  depende de  $\delta$ , e  $\delta$  depende de  $\lambda$

logo analisando a luz à saída podemos fazer  
 medições extremamente rigorosas de  $\lambda$ , nos já sabemos.

Imagine que temos 2 comprimentos de onda muito próximos. As franjas de interferência vão ser de um F.P. iam estar sobrepostas! Como as distinguir? Qual será o limite de resolução do nosso sistema?

O critério de Rayleigh é que duas franjas ~~se~~ consideram-se resolvidas qdo a irradiância no centro do padrão é  $\frac{8}{\pi^2}$  do máximo, no centro do padrão. ( $\frac{8}{\pi^2} \approx 81\%$ ). (Nota que existem outros critérios).

9.50

Considerando que ambos têm irradiâncias iguais  $I_a = I_b$ , então no centro temos:

Franja a + Franja b

$$I_{max} A(\delta)_{\delta = \delta_a + \frac{\Delta\delta}{2}} + I_{max} A(\delta)_{\delta = \delta_b - \frac{\Delta\delta}{2}}$$

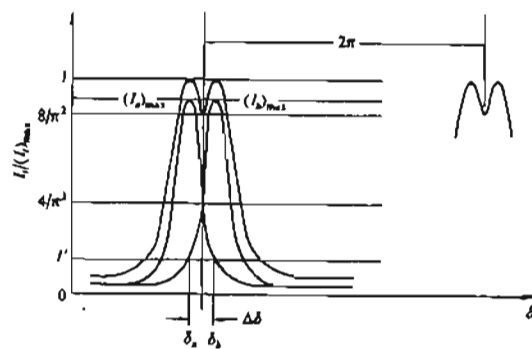


Figura 9.50 Franjas parcialmente sobrepostas.

Num dos máximos temos:  $I_{a(max)} + I_b(\delta - \frac{\Delta\delta}{2})$

$$I_a(max) + I_b(max) A(\delta)_{\delta - \Delta\delta}$$

Logo no ~~centro~~ <sup>maximo</sup> ~~centro~~  $\text{Vere}$ :  $I_{\max}(1 + A(\delta)_{\delta-\Delta\delta})$

e no ~~centro~~  $\text{Vere}$ :  $I_{\max}(2 A(\delta)_{\delta-\frac{\Delta\delta}{2}})$

O qe se pde mostrar resulta em:

$$\Delta\delta \approx \frac{4,2}{\sqrt{F}}$$

Esta é a diferença de fase mínima qe permite distinguir duas franjas diferentes. Escravando em  $\text{Vere}$  de comprimento de onda

$$m\lambda_0 = 2n_f d \cos\theta_c$$

derivando

$$m(\partial\lambda_0) + (\partial m)\lambda_0 = 0 \rightarrow \frac{\lambda_0}{\partial\lambda_0} + \frac{m}{\partial m} = 0$$

Quando  $\delta$  varia de  $2\pi$ ,  $m$  varia de  $\approx 1$ , logo

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta m} = 2\pi \rightarrow \Delta m = \frac{\Delta\delta}{2\pi}$$

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} = -\frac{2\pi m}{\Delta\delta}$$

Comprimento de onda  $\rightarrow \lambda_0$   
 Valor mínimo de diferença entre  $\lambda \rightarrow (\Delta \lambda_0)_{\min}$

$$\frac{\lambda_0}{(\Delta \lambda_0)_{\min}} = - \frac{2\pi m}{\Delta \delta}$$



$$R = \frac{\lambda_0}{(\Delta \lambda_0)_{\min}}$$

Poder de Resolução Cromática

Para incidência normal  $R \approx f \frac{2n_f d}{\lambda_0}$

$$R \approx f m$$

Só falta falar de mais uma grandeza, a Banda Espectral Livre.

Imagine que temos um padrão e que se sobrepõem outros padrões com outros  $\lambda$ . Se a risca  $m$  de  $\lambda_0$  se aproxima da risca  $(m+1)$  de  $\lambda_1$  então esses comprimentos estão separados pela B. espectral livre desse Etalon.

Pode-se demonstrar que:  $(\Delta \lambda_0)_{\text{BEL}} \approx \frac{\lambda_0^2}{2n_f d}$

É desejável que  $(\Delta \lambda_0)_{\min}$  seja tão pequeno qto possível e  $(\Delta \lambda_0)_{\text{BEL}}$  tão grande, mas  $\left( \frac{(\Delta \lambda_0)_{\text{BEL}}}{(\Delta \lambda_0)_{\min}} = f \right)$



# Revestimentos em multicamadas

Existe hoje inúmeras aplicações em que se utilizam ~~esses~~ revestimentos multicamadas, quer seja para a construção de espelhos, quer seja para a construção de superfícies anti-reflexo (por exemplo nos óculos), etc

Esses revestimentos podem ter particularmente a refletividade que se pretender, e para os comprimentos de onda que se pretenderem (além de outras especificações, por exemplo dispersão controlada, etc...). 9.53

O tratamento matemático destes "filtros" é algo complexo, pelo que iremos apresentar apenas o essencial. Na figura ao lado são indicados os campos que serão considerados.

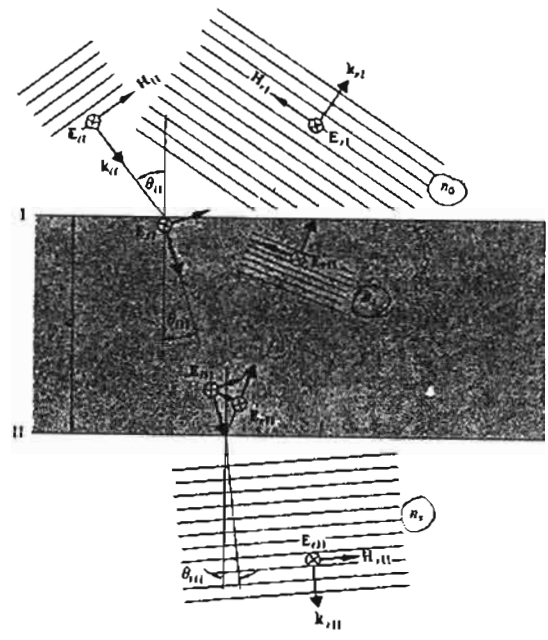


Figura 9.53 Condições fronteira para os campos.

Tem 2 interfaces (I e II) entre 3 meios  $n_0, n_1$  e  $n_2$ .

Das condições fronteiras para este problema resultam duas equações que podem ser escritas de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{bmatrix}$$

E campo eléctrico  
H intensidade do campo magnético

do mesmo modo

$$\begin{bmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{III} \\ H_{III} \end{bmatrix}$$

logo

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{III} \\ H_{III} \end{bmatrix}$$

e assim sucessivamente

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{II} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \mathcal{M}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{P+1} \\ H_{P+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{II} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \mathcal{M}_P \end{bmatrix}$$

Veja-se o seguinte caso:  $\begin{bmatrix} \mathcal{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$

(não vamos falar como é que esses elementos são calculados).

Definindo dois parâmetros "auxiliares"  $Y_o = \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} n_o \omega \theta_{tI}$   
 $Y_s = \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} n_s \omega \theta_{tII}$

e sabendo que  $E_I = E_{iI} + E_{rI}$

e que para o H se obtém  $H_I = (E_{iI} - E_{rI})Y_0$

temos

$$\begin{bmatrix} (E_{iI} + E_{rI}) \\ (E_{iI} - E_{rI})Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{tII} \\ E_{tII}Y_S \end{bmatrix}$$

resulta:

$$1 + r = m_{11}t + m_{12}Y_S t$$

$$(1 - r)Y_0 = m_{21}t + m_{22}Y_S t$$

Como  $r = \frac{E_{rI}}{E_{iI}}$        $t = \frac{E_{tII}}{E_{iI}}$

$$r = \frac{Y_0 m_{11} + Y_0 Y_S m_{12} - m_{21} - Y_S m_{22}}{Y_0 m_{11} + Y_0 Y_S m_{12} + m_{21} + Y_S m_{22}}$$

$$t = \frac{2Y_0}{Y_0 m_{11} + Y_0 Y_S m_{12} + m_{21} + Y_S m_{22}}$$

Assim seja, sabendo a matriz, sabemos r e t

Vejam agora alguns exemplos.

- Revestimentos anti-refletores

Vamos considerar  $\theta_{iI} = \theta_{tII} = \theta_{tII} = 0^\circ$  (incidência normal)

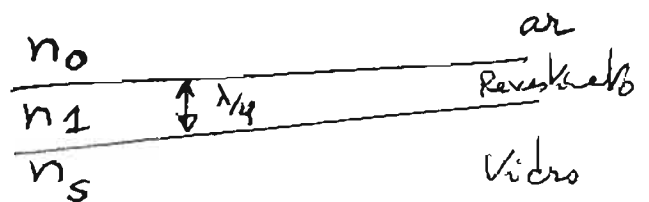
e que a altura do filme é  $d = \frac{n_2 \lambda}{4}$

neste caso  $R = r^2$ :

$$R = \frac{(n_0 n_s - n_1^2)^2}{(n_0 n_s + n_1^2)^2}$$

Para não ter reflexões ~~não~~  $n_0 n_s = n_1^2$

Este é o tipo de revestimento  
que é aplicado nos óculos



note que como  $n$  depende de  $\lambda$ , então não temos  
 $n_0 n_s = n_1^2$  para todos os  $\lambda$ ! Normalmente o revestimento  
é pensado para o verde (a meio do espectro visível).

Além disso, nem sempre é possível encontrar  
materiais que tenham o  $n$  que nos queremos. Por  
isso muitas vezes consegue-se reduzir o  $R$ , mas não  
fazer o  $R = 0$ !

Revestimentos Multicamada

Dão que se use revestimentos com 2 ou 3 (ou mais)  
camadas.

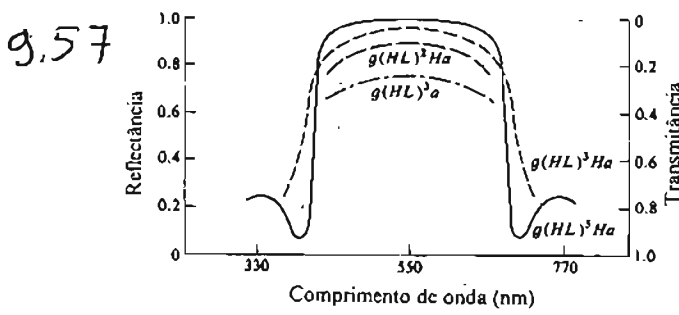


Figura 9.57 Reflectância e transmitância para várias estruturas periódicas.

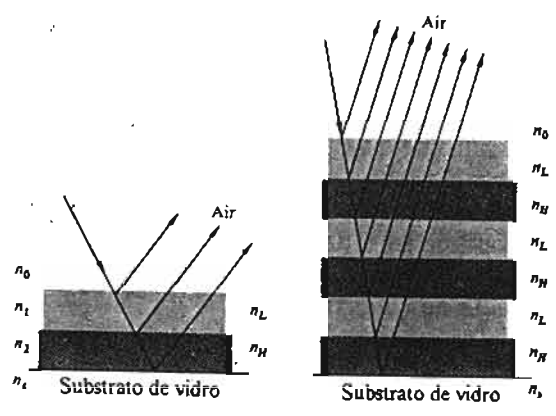


Figura 9.56 Uma estrutura periódica.

Por exemplo é habitual utilizar camadas com índices alternados H (alto) e L (baixo), em cima de vidro (g) e para o ar (a)

$$g(HL)^n a$$

n ← nº de camadas

(todas as camadas tem um comprimento "óptico"  $\frac{\lambda}{4}$ )

$$d = \frac{n\lambda}{4}$$

daí que as camadas H e L tem alturas diferentes, porque  $n_H \neq n_L$

Estes revestimentos pde ser pe objetivo reduzir a reflectividade ou torna-la tão alta quanto possível. (É difícil obter espelhos com  $R \approx 100\%$  para todos os  $\lambda$  pretendidos).