Convolução e Transformadas de Fourier

Transformada de Fourier

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi wx} dx$$

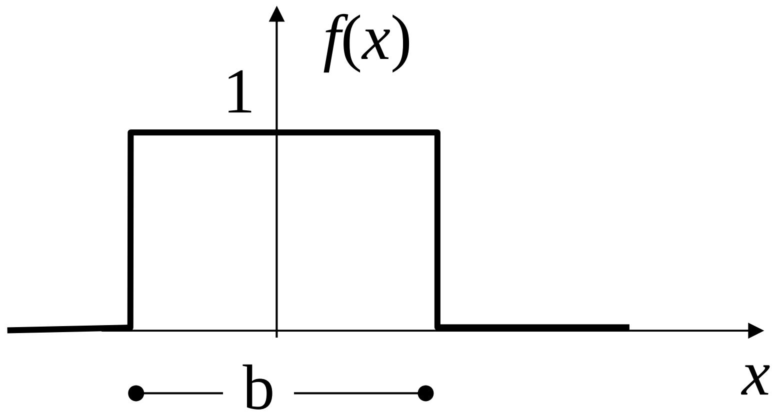
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{+i2\pi wx} dw$$

Propriedades da transformada

$f(ax)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} F\left(\frac{u}{a}\right)$
$f(x-a)$	$e^{-j2\pi a u} F(u)$
$F(x)$	$f(-u)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$j2\pi u \, F(u)$
$f(x)+h(x)$	$F(u)+H(u)$
$f(x) * h(x)$	$F(u)\,H(u)$

convolução

Função rectângulo



$$rect\left(\frac{x}{b}\right) = \begin{cases} 0 & se\ x < -b/2 \\ 1 & se\ x \in [-b/2, b/2] \\ 0 & se\ x > b/2 \end{cases}$$

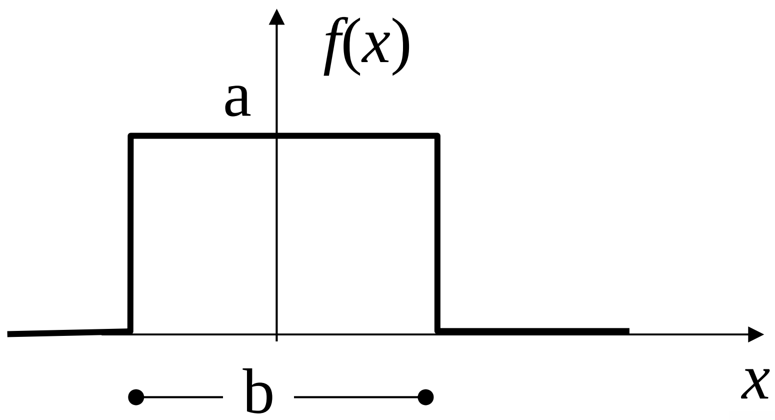
$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{x}{b}\right) e^{-i2\pi wx} dx = 1\int_{-b/2}^{b/2} e^{-i2\pi wx} dx$$

$$= \frac{1}{-i2\pi w} e^{-i2\pi wx}\Big]_{-b/2}^{b/2} = \frac{1}{-i2\pi w}\left(e^{-i\pi wb} - e^{i\pi wb}\right)$$

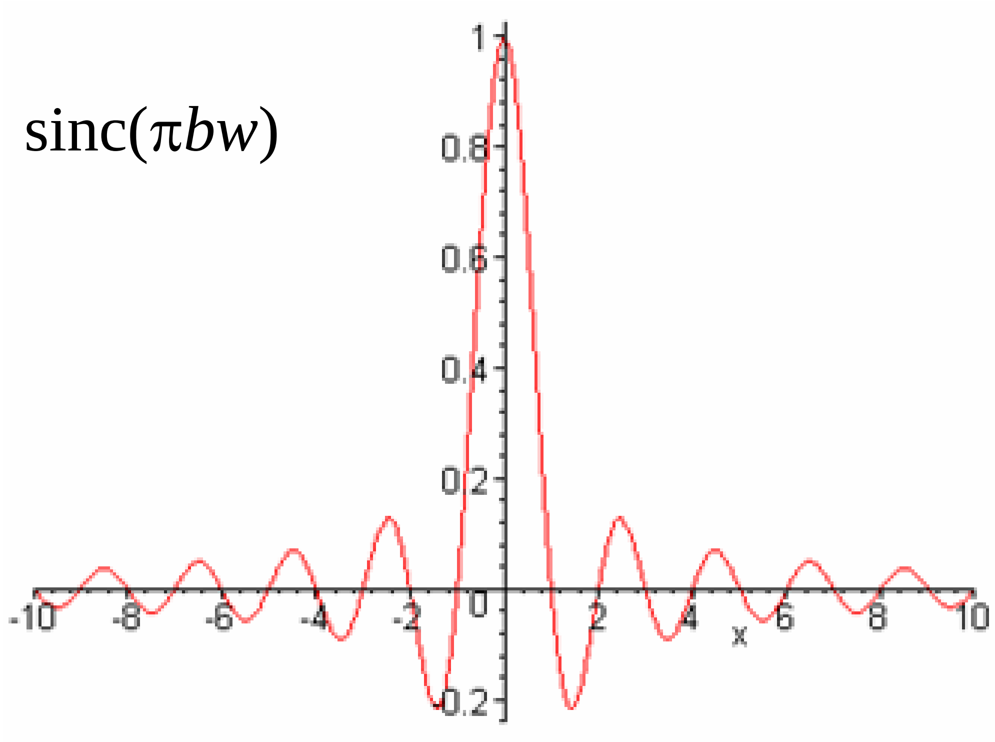
$$= \frac{1}{\pi w}\frac{\left(e^{i\pi wb} - e^{-i\pi wb}\right)}{2i} = \frac{1}{\pi w}\sin(\pi wb)$$

$$F\left[rect\left(\frac{x}{b}\right)\right] = b\frac{\sin(\pi wb)}{\pi wb}$$

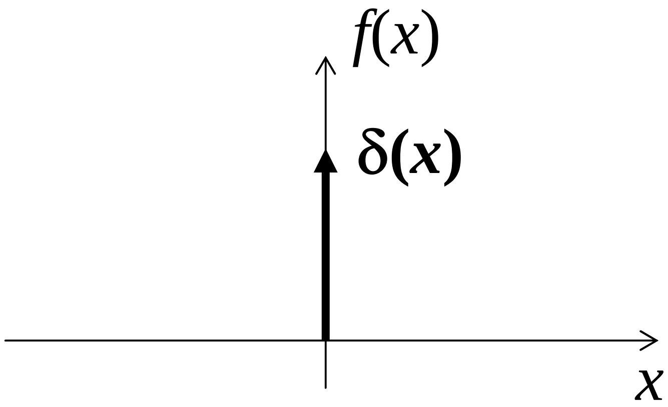
Transformada da rectângulo



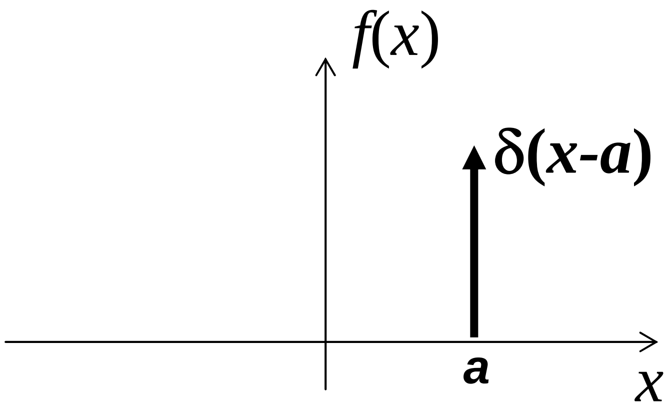
$$F(w) = ab\,\frac{\sin(\pi wb)}{\pi wb}$$

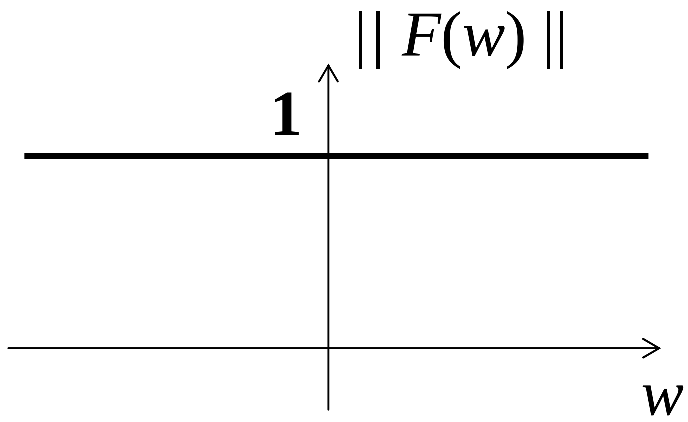


Transformada do Delta de Dirac



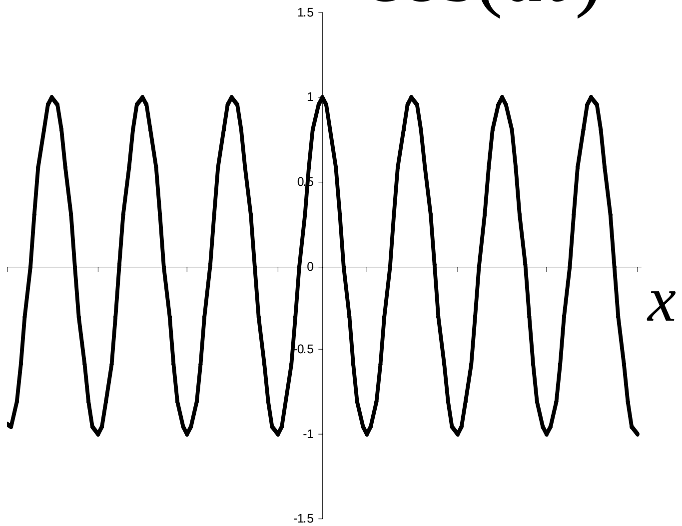
$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i2\pi wx} dx = e^{0} = 1$$

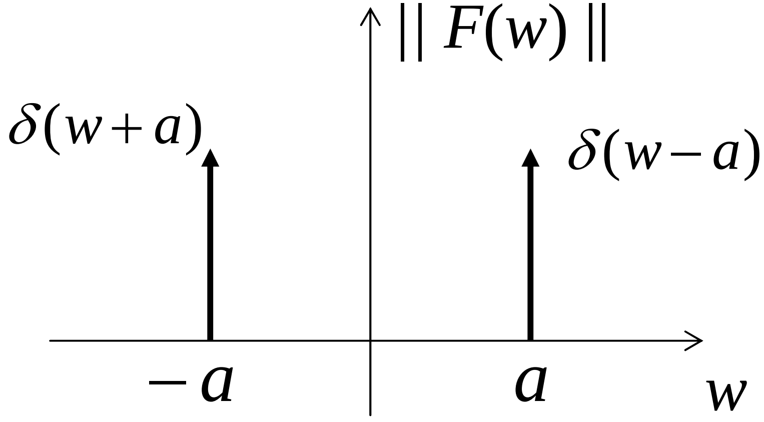




Cosseno

$\cos(at)$





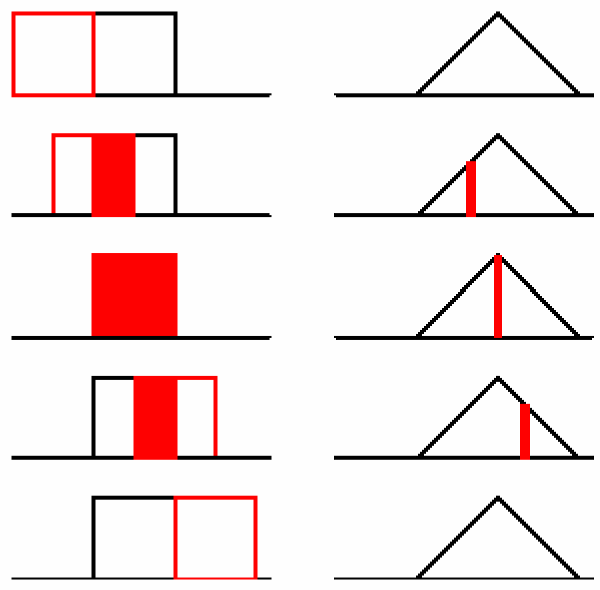
$$F(w) = \frac{1}{2}\left[\delta(w+a) + \delta(w-a)\right]$$

Convolução

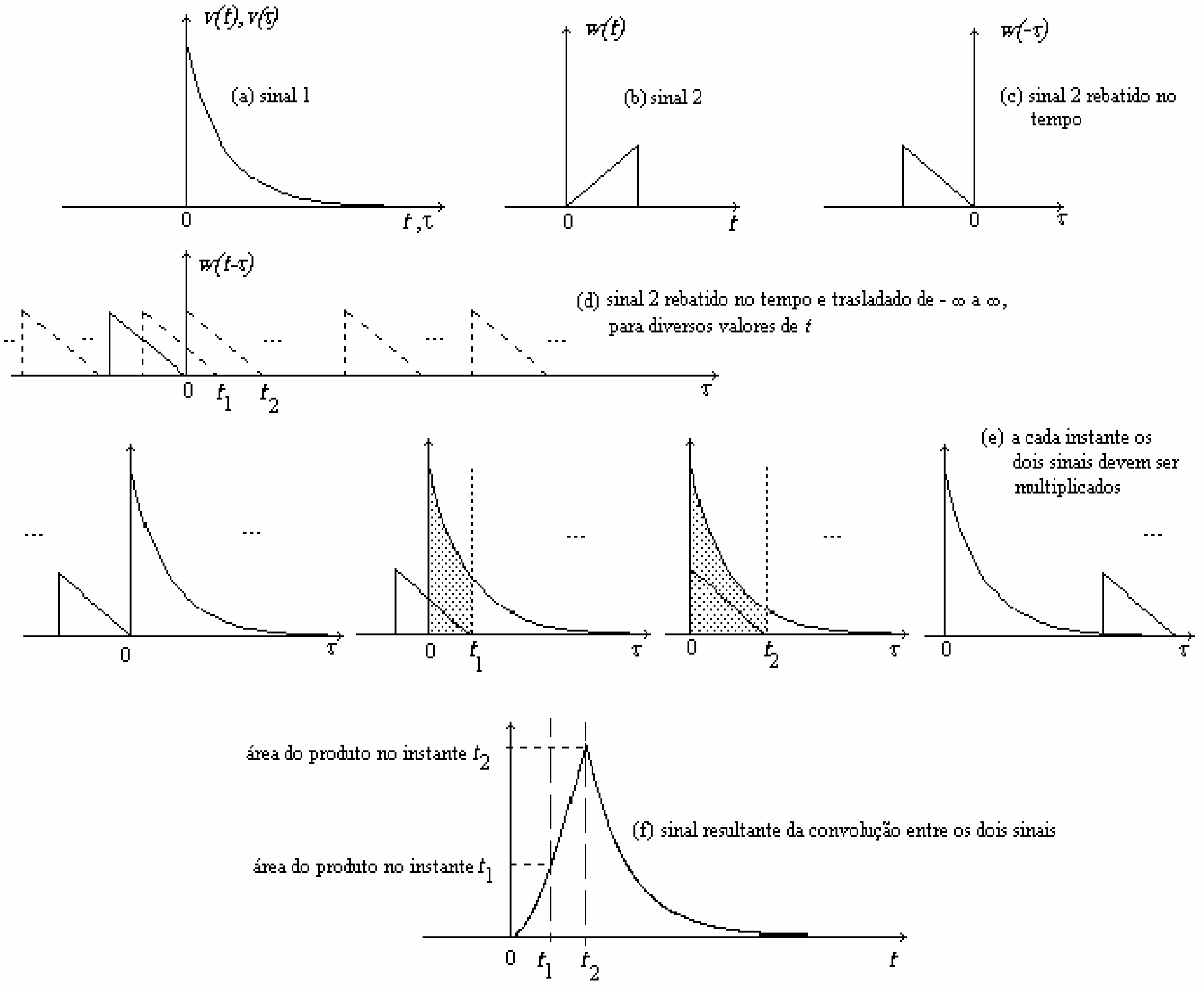
$$h(x) = f \otimes g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$$

$$h(x) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} g(t-x)f(x)dt$$

A convolução no instante t pode ser vista como sendo a área da intersecção entre f (x) e g(t-x).



(o resultado da convolução entre dois rectângulos é um triângulo)



v(t), v(τ)
(a) sinal 1
0
t , τ
w(t)
(b) sinal 2
0
t
w(-τ)
(c) sinal 2 rebatido no tempo
0
τ
w(t-τ)
(d) sinal 2 rebatido no tempo e trasladado de - ∞ a ∞, para diversos valores de t
0
t1
t2
τ
(e) a cada instante os dois sinais devem ser multiplicados
área do produto no instante t2
área do produto no instante t1
(f) sinal resultante da convolução entre os dois sinais

A convolução pode ser utilizada para "posicionar" uma outra função, utilizando as funções Delta de Dirac.

$$h(x) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} f(t - x)\,\delta(x - a)\,dt = f(x - a)$$

Por exemplo para "colocarmos" duas funções rectângulo, em posições –a/2 e +a/2, podemos fazer a convolução entre duas funções delta, nessas posições, e a função rectângulo.