Óptica 2005/06

Aula 1 Cap. 2 (EH)

- Ondas

Muitos fenomenos na natureza podem ser representados por ondas, desde as ondas do mar, às vibrações das cordas de uma guitarra ou a luz!

Então vamos começar por estudar de modo genérico as ondas:

Uma onda é uma perturbação auto-sustentada do meio através do qual se propaga.

Ora se a onda se propaga, isso significa que para a caracterizarmos vai ser preciso conhecer as suas características no espaço e no tempo! Vamos, para simplificar, começar por considerar o caso unidimensional.

Se a perturbação for descrita por $\psi = f(x,t)$ então num determinado instante t, por exemplo $t=0$, a onda vai ter um determinado perfil $\psi(t=0) = f(x,0) = f(x)$

Passado algum tempo, e como a onda se está a propagar, esse perfil vai-se encontrar noutro local. $\psi = f(x')$

Considerando um referencial que se desloque com a onda, facilmente se conclui que:

$$x' = x - vt$$

em que v é a velocidade.

[Nota: v é velocidade
ν é frequência

Assim, generalizando, podemos escrever para qualquer t

$$\psi = f(x,t) = f(x - vt)$$

esta é a função de onda a uma dimensão.

Reparem que esta expressão não indica qual é a forma da onda, mas apenas como é que ela se vai propagar. Para sabermos a forma, precisamos de mais informação, e.g. as condições fronteira.

Por convenção, considera-se que quando $v > 0$ temos uma onda a propagar-se no sentido "positivo" do eixo dos XX.

Para representar uma onda a propagar-se em sentido contrário, é habitual utilizar-se:

$$\begin{cases} \psi = f(x + vt) \ \leftarrow \\ \psi = f(x - vt) \ \rightarrow \end{cases}$$

(em que se considera $v = |v|$)

Um exemplo de uma onda que pode ser descrita por uma função do tipo apresentado é o das ondas numa corda esticada. (Atenção que numa corda tb podem existir ondas bidimensionais!)

Isto porque a perturbação (vibração) da corda só depende da posição ao longo da corda (o nosso eixo dos xx)

Vamos agora derivar a equação de onda. Para tal começamos por derivar a expressão anterior em ordem a x

$$\psi = f(x - vt)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot 1 \qquad \text{porque} \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - vt)$$

$$= 1$$

e agora em ordem a t

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \left[\mp v \right] \qquad \begin{cases} - \text{ quando } \longrightarrow \\ + \text{ quando } \longleftarrow \end{cases}$$

$$= \mp v \frac{\partial f}{\partial x'}$$

Substituindo agora uma expressão na outra

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mp v \frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mp v \frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

Mas esta expressão pode ter duas soluções ($-$ e $+ v$) pelo que devemos procurar uma ~~outra~~ equação mais geral.

Fazendo as 2as derivadas da expressão inicial:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}}$$

Esta é a <u>Equação de Onda a uma dimensão</u>

Um ponto importante é que se tivermos duas funções que são soluções desta equação, então uma combinação linear dessas soluções também é solução!

Se ψ_1 e ψ_2 são tais que

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$$

Somando as duas expressões

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\psi_1 + \psi_2\right) = \frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\left(\psi_1 + \psi_2\right)\right]$$

Logo $\psi_1 + \psi_2$ também é solução! c.q.d.

De um modo mais geral, pode-se escrever que a solução ψ da equação de onda será uma combinação de ondas, umas a propagarem-se para a direita, outras para a esquerda, com diferentes amplitudes, e perfis.

$$\psi = c_1 \cdot f_1(x - vt) + c_2 \cdot f_2(x + vt)$$

c_1, c_2 amplitudes

f_1, f_2 perfis

1 é da esquerda para a direita

2 é da direita para a esquerda.

O que estamos aqui a ver é a base do princípio da sobreposição, que iremos estudar em detalhe mais à frente.

Note-se que ~~para~~ a equação de onda não define o perfil da onda, mas se uma determinada função f respeitar a equação de onda, então ela representa uma onda!
Essa função f terá que ser função de $(x-vt)$ ou/e $(x+vt)$, e terá que ser duplamente diferenciável!

Que funções é que conhecem que são "facilmente" duplamente diferenciáveis? as Sinusoidais!

- Ondas Harmónicas

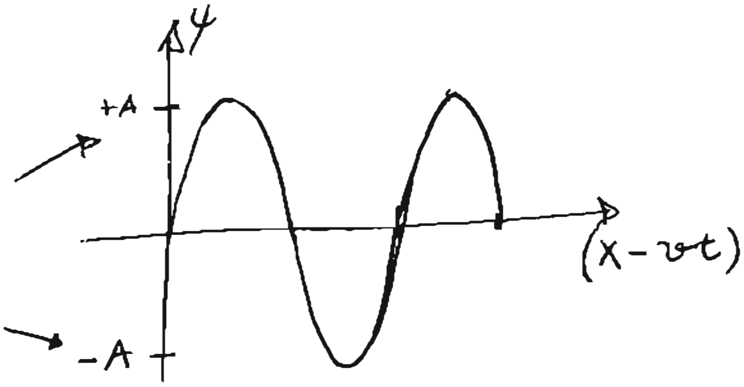
Outra vantagem das ondas sinusoidais, ou harmónicas, é que são a base da análise de Fourier, que permite screver qualquer onda, como uma sobreposição de ondas sinusoidais. Iremos voltar a este tema mais tarde.

$$\psi(x,t) = A\, \text{sen}\left[K(x - vt)\right]$$

$\boxed{K \text{ é o número de propagação}}$

$\boxed{A \text{ é a amplitude}}$

O período spacial é o comprimento de onda, λ



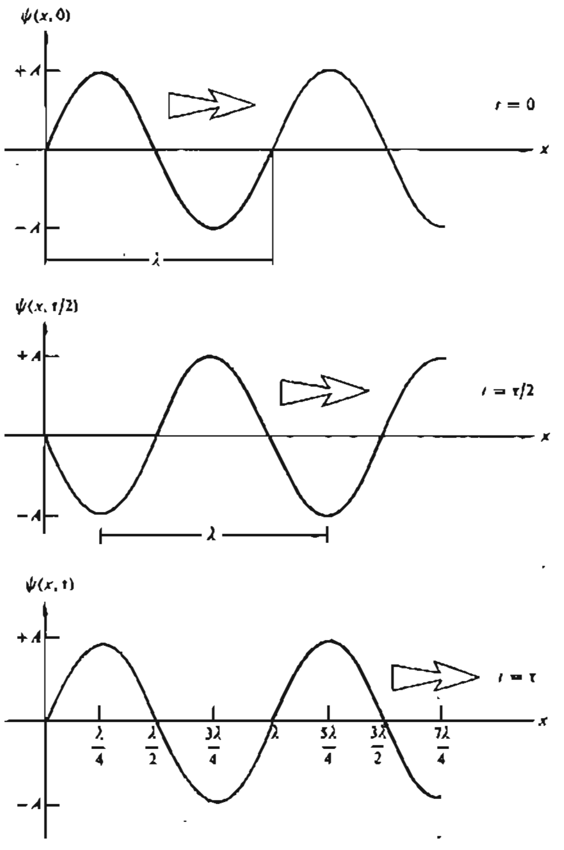


Figura 2.5 Uma onda progressiva em três instantes diferentes.

Se x variar de λ

então $\psi(x+\lambda) = \psi(x)$

Para uma função seno isso acontece quando o argumento varia de 2π

$$\text{sen}\, k(x - vt) = \text{sen}\, k(x + \lambda - vt)$$

$$= \text{sen}\left[k(x - vt) + k\lambda\right]$$

$$k\lambda = 2\pi \Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Em termos temporais podemos fazer a mesma análise, sendo

$\boxed{\tau \text{ é o período temporal}}$

$$k v \tau = 2\pi \qquad \frac{2\pi}{\lambda} v \tau = 2\pi \qquad \boxed{v = \frac{\lambda}{\tau}}$$

habitualmente também se utiliza:

$\boxed{\text{O inverso do período temporal é a freqüência}}$

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

pode-se também definir a freqüência angular:

$$\omega = 2\pi \nu$$

Notem o paralelismo:

	Espaço	Tempo
Repete-se ao fim de:	comprimento de onda λ (m)	Período τ (s)
Inverso:	freqüência espacial (Pouco utilizada) $\frac{1}{\lambda}$ (m^{-1})	Freqüência $\nu = \frac{1}{\tau}$ (Hz)
"Inverso angular"	Número de propagação $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ (rad/m)	freqüência angular $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau}$ (rad/s)

$$v = \frac{\lambda}{\tau} \quad (m/s)$$

$$\boxed{\Psi = A \operatorname{Sen}\left[Kx \mp \omega t\right]}$$

$$\Psi = A \operatorname{Sen}\left[K(x \mp v t)\right] \qquad \Psi = A \operatorname{Sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{\tau}\right)\right]$$

$$\Psi = A \operatorname{Sen}\left[2\pi \nu \left(\frac{x}{v} \mp t\right)\right] \qquad \text{etc...}$$

São todas representações equivalentes! Basta saber uma e as relações entre as grandezas.

Os conceitos de período, comprimento de onda, etc podem ser extendidos a outras ondas, não sinusoidais, desde que sejam periódicas.

Em geral vamos usar $\Psi_{(x,t)} = A \operatorname{Sen}(Kx - \omega t)$

o termo $(Kx - \omega t)$ chama-se <u>Fase</u>

regra geral deve-se escrever:

$$\varphi = Kx - \omega t + \underline{\underline{\varepsilon}}$$

em que ε é a fase na origem, que pode ou não ser zero.

Essa fase na origem depende das condições iniciais, mas não depende do tempo nem da distância!

Podemos agora generalizar as definições de ω e k:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\Big|_{x=\text{constante}} = \omega$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\Big|_{t=\text{constante}} = k$$

Para aqueles que se lembrem, em termodinâmica aplica-se a chamada relação cíclica

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Aplicando a este caso:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_\varphi \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_t = -1$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_\varphi = -\frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_t}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\varphi = -1 \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_t$$

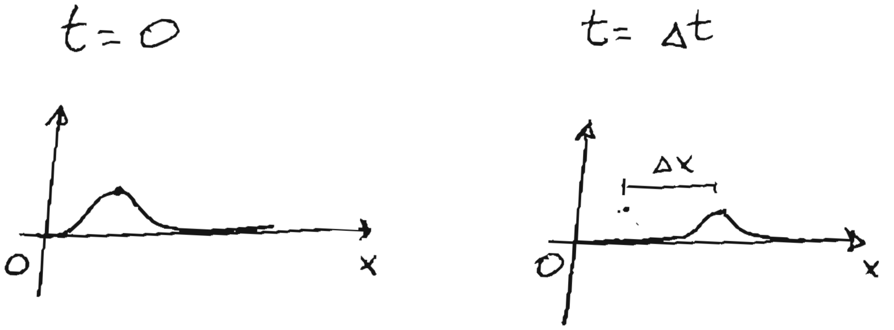
$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\varphi = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\varphi} = - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \text{velocidade}, \quad \text{com fase constante}$$

Por exemplo, se tivermos $\psi = A \operatorname{sen}(\underbrace{kx - \omega t}_{\varphi})$

o primeiro termo $\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\varphi}\right]$ diz-nos com que velocidade o perfil (um certo valor da fase) se desloca.



$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Daí que esta velocidade, à qual o perfil se propaga, se denomine <u>Velocidade de Fase</u>

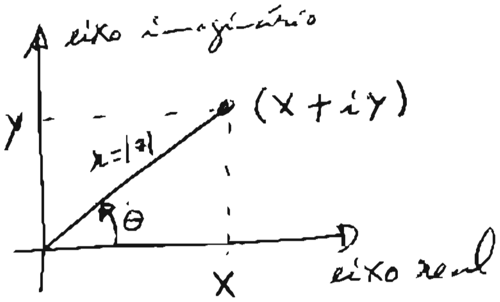
(é positiva quando $\rightarrow$, e negativa quando $\leftarrow$)

Vejamos agora um método mais eficiente de representar as ondas sinusoidais!

- Representação Complexa

Recordando os números complexos:

$$z = x + iy \qquad (i = \sqrt{-1})$$



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Usando a fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$z = r e^{i\theta}$$

então, temos duas representações equivalentes:

$$z = x + iy \qquad z = r e^{i\theta}$$

A segunda é mais útil, pois permite identificar facilmente o módulo ($r = |z|$) e a "fase" θ

Recordemos ainda o complexo conjugado:

$$z = x + iy \qquad z^* = x - iy$$
$$= r e^{-i\theta}$$

e que o módulo é dado por $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$

a adição é $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

e a subtração é idêntica $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

a multiplicação: $z_1 z_2 = r_1 r_2 \, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

e a divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

não esquecer que: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

e que se $z = e^{x+iy}$

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$$
$$= \sqrt{e^{x+iy} \cdot e^{x-iy}}$$
$$= \sqrt{e^{2x+i\cancel{(y-y)}}}$$
$$= \sqrt{e^{2x}}$$
$$= e^x$$

finalmente:

$$\cos(0) = \cos(2\pi) = 1 = e^{i2\pi}$$
$$\cos(\pi) = -1 = e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi/2) = 0 \\ \operatorname{Sen}(\pi/2) = 1 \end{cases} \Rightarrow e^{i\pi/2} = 0 + i = i$$

E nunca esquecer que as funções sinusoidais são periódicas em $\underline{2\pi}$!

$$\operatorname{Sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{Sen}(\theta)$$
$$\cos(\theta - 2\pi) = \cos(\theta)$$

Aplicando agora os complexos ao que nos interessa:

Sabemos que: $Z = Re(z) + i\, Im(z)$

em que $\begin{cases} Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \\ Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) \end{cases}$ e que $\begin{cases} Re(z) = r \cos\theta \\ Im(z) = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

Daqui se conclui que quer a parte real, quer a parte imaginária podem representar ~~a~~ ondas harmonicas (sinusoidais).

Por esse motivo é habitual (e útil) representar:

$$\Psi_{(x,t)} = Re\left[A e^{i(\varphi)}\right]$$

que é equivalente a:

$$\Psi_{(x,t)} = A \cos(\varphi)$$

Normalmente, para simplificar a notação, "esquecemos" a "Re" e escrevemos apenas:

$$\boxed{\Psi_{(x,t)} = A e^{i\varphi}}$$

Mas no final, se pretendermos saber, por exemplo, a amplitude deveremos tomar apenas a parte real.

- Tipos de Ondas

Quando falamos da fase, velocidade de fase, já falamos que essa velocidade corresponde à velocidade com que um determinado ponto do perfil da onda (que possui uma determinada fase) se propaga.

Se pensarmos agora em todos os pontos da onda que possuam a mesma fase, facilmente chegamos à idéia de Frente de onda

Talvez o tipo de frente de onda mais fácil de identificar seja o circular (para ondas a 2 dimensões).

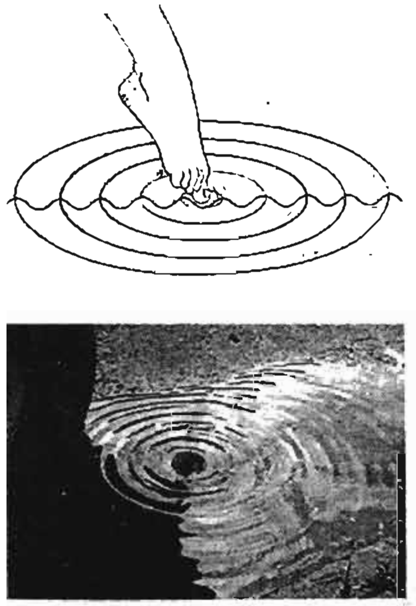


Figura 2.10 Ondas circulares. (Fotografia de E. H.).

Como é fácil observar, os pontos com a mesma fase distribuem-se em círculos em redor da fonte.

Mas talvez o mais simples de tratar (pelo menos na maior parte dos casos) será o das ondas planas, em que os pontos com a mesma fase se distribuem em planos (naturalmente no espaço 3D, se quiser pensar em duas dimensões serão linhas).

Definindo um vector $\vec{K}$ tal que $\vec{K}$ seja perpendicular ao plano com fase constante, e sabendo que esses planos se "repetem" no espaço com um período λ na direcção de $\vec{K}$

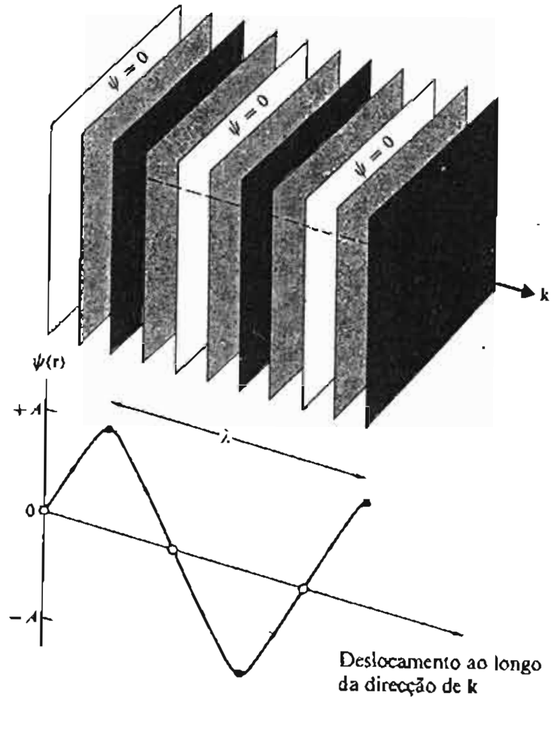


Figura 2.13 Frentes de onda plana harmónica.

Pelo que é fácil concluir que k deve ser do tipo:

$$|\vec{K}|\lambda = 2\pi$$

$$|\vec{K}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

<u>O vector $\vec{K}$ é o vector de propagação</u>

(é a generalização do número de propagação K)

$$\Psi_{(x,t)} = A e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

De referir que estamos a assumir que a amplitude da onda é igual em todo o plano, o que não pode ser verdade (desde $-\infty; +\infty$), mas para já é uma aproximação aceitável.

Por vezes decompõe-se $\vec{K}$ em $\vec{K} = K_x \hat{x} + K_y \hat{y} + K_z \hat{z}$

Pensemos agora noutros tipos de ondas, para isso, vamos começar por generalizar a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Se pensarmos a 3D, vamos ter x y e z, logo parece lógico escrever:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

(Naturalmente esta não é uma demonstração, mas penso que é suficiente para perceberem o conceito).

Que pode ser escrita usando o Laplaciano $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\boxed{\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}}$$

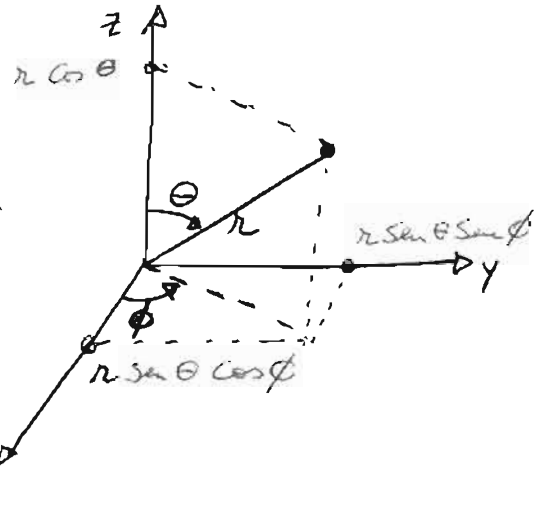
Esta Equação tem naturalmente outras soluções além das já referidas ondas planas. (E goza da mesma "propriedade" da sobreposição de ondas, já referida para equação a 1 dimensão) ou seja se f e g são funções que são soluções da equação anterior, então

$$\psi(\vec{r},t) = c_1 f(\vec{r}\cdot\vec{k} - \omega t) + c_2 g(\vec{r}\cdot\vec{k} + \omega t)$$

também é solução.

Passando agora para as ondas esféricas.

A 2 dimensões são fáceis de observar. Daí que não seja difícil generalizá-las para 3D, imaginando as frentes de onda como esferas concêntricas que se vão expandindo.



Para as estudarmos devemos, naturalmente, considerar um sistema de ~~eixos esfe~~ coordenadas esféricas:

$$X = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$$

$$Y = r \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$Z = r \cos\theta$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\ldots\right.$$

$$\left.\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Como pode ver o Laplaciano em coordenadas esféricas é algo "chato" de calcular. Mas se estamos a falar de ondas esféricas, então estamos a pensar em ondas cuja ~~ampli~~ frente de onda é simétrica em torno da origem, ou dito de outra maneira, ~~são~~ ondas que não dependem de θ ou ϕ:

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

Aplicando agora esta expressão na equação de onda

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

e escrevendo ∇^2 numa forma equivalente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi)$$

Ora esta equação é idêntica à unidimensional excepto que temos $(r\psi)$ em vez de ψ. Logo as soluções vão ser do tipo:

$$r\psi = f(r - vt)$$

$$\boxed{\psi = \frac{f(r - vt)}{r}}$$

Se anteriormente uma das soluções era a função seno, então agora vai ser $\frac{\text{seno}}{r}$!

Por exemplo $\psi(r,t) = A \frac{\text{Sen}[kr - \omega t]}{r}$

$$\psi(r,t) = \left(\frac{A}{r}\right) \text{Sen}[kr - \omega t]$$

Note que, ao contrário das ondas planas, à medida que as ondas se propagam, a Amplitude vai diminuindo $\left(\frac{1}{r}\right)$!

Deve também ter em mente que procuramos especificamente ondas esféricas, e que outras soluções podem existir, elípticas, etc.

As ondas esféricas são importantes, por exemplo, para o estudo das fontes pontuais. Nessas fontes, considera-se que a luz se espalha de forma uniforme por todo o espaço, ou dito de outra maneira: as fontes pontuais são isotrópicas!

Um exemplo normalmente utilizado para explicar o que é uma fonte pontual é o Sol. Mas é necessário ter algum cuidado com essa aproximação, porque depende, por exemplo, das distâncias que estamos a considerar.

Para começar o Sol não é pontual, ~~por outro lado~~ é uma esfera com um diâmetro de   Km, e por outro lado, se estivermos muito longe as ondas até podem ser consideradas localmente quase planas;

(EH) Figura 2.18

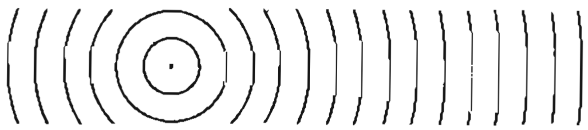


Figura 2.18 Diminuição da curvatura de ondas esféricas com a distância.

Finalmente, vamos ver um 3º tipo de ondas, as cilíndricas. Voltando a imaginar as ondas circulares (2D), podemos pensar nas cilíndricas como sendo o prolongamento "vertical" dessas ondas.

O Laplaciano em coordenadas cilíndricas escreve-se:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Procurando ondas cilíndricas sem dependência em θ e em z:

a eq. de onda fica:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

As soluções desta eq. são funções de Bessel (que iremos ver mais tarde).

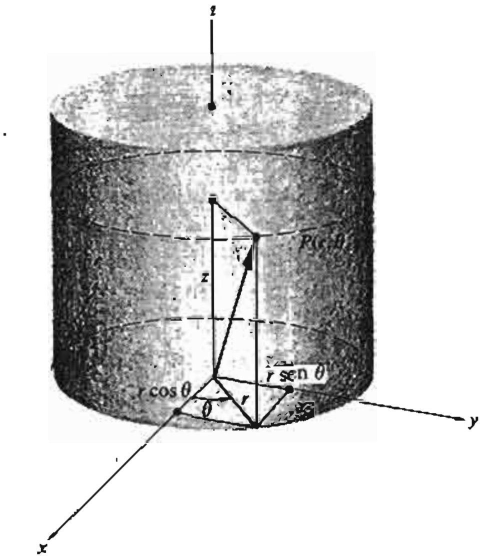


Figura 2.19. Sistema de coordenadas cilíndricas.

Por enquanto basta pensar que para valores de r elevados

$$\psi(r,t) \approx \frac{A}{\sqrt{r}}\, e^{i(kr-\omega t)}$$

Ondas vectoriais

Até agora não dissemos nada sobre a amplitude, ou melhor, sobre o que representa a amplitude.

Naturalmente, para diferentes tipos de ondas representam coisas diferentes: a altura das "ondinhas" na água, a variação da pressão atmosférica no caso do som, etc...

E para a luz?

Sem entrar em detalhes (será mais tarde), a luz é uma onda electromagnética, ou seja, o que está a variar são os campos eléctrico e magnético!

Como iremos ver, o campo eléctrico é normalmente perpendicular à direcção de propagação, pelo que a <u>luz é uma onda transversal!</u>

Pelo contrário, o som é uma onda longitudinal

(EH) 2.21

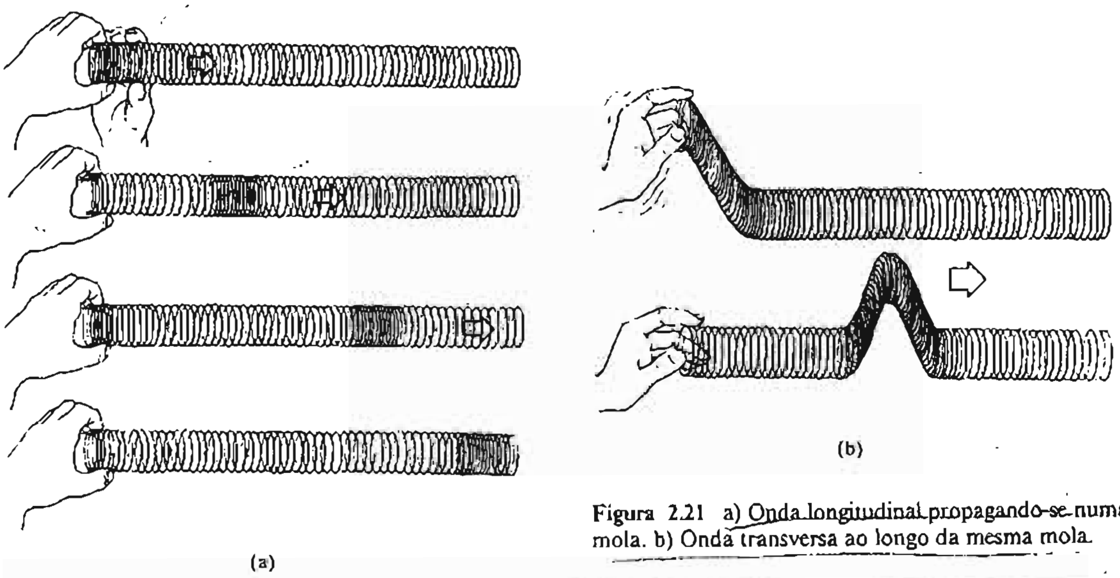


Figura 2.21 a) Onda longitudinal propagando-se numa mola. b) Onda transversa ao longo da mesma mola.

Como alguns também já saberão, o campo eléctrico (ou o magnético) são campos vectoriais, pelo que também temos que considerar qual é o plano em que a amplitude desse campo está a variar! (e como iremos ver mais tarde, esse plano não tem de estar "parado"). Esse é o <u>plano de polarização</u>

Ou seja, temos que considerar $\vec{A}$ e não A

$$\boxed{\psi(r,t) = \vec{A}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}$$

Mais tarde iremos ver quando é possível aproximar $\vec{A}$ por A.