

Óptica

Difracção

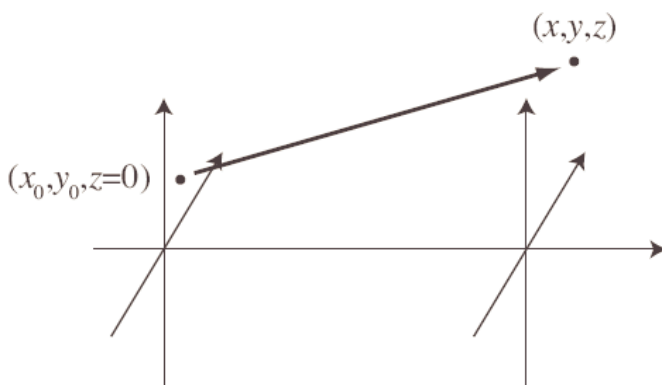
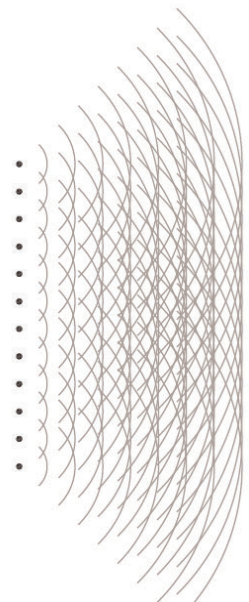
Até agora limitamo-nos a estudar problemas em que tínhamos 2 fontes a emitir radiação, que depois interferia num alvo. Mas se em vez de termos 2 fontes tivermos um número muito elevado de fontes?

O estudo nesse caso é naturalmente mais complexo, apesar de não existir nenhuma diferença assinalável no processo físico subjacente. Devido a essa complexidade o estudo desses fenómenos é designado pelo nome específico de Difracção (apesar de ser ainda um processo de interferência).

Se se recordarem, há algum tempo atrás afirmamos que (segundo o princípio de Huygens) para obtermos a frente de onda depois dela se ter propagado, podemos considerar cada ponto da frente de onda primária como uma fonte de ondas esféricas, e assumir que a frente de onda secundária será a envolvente dessas ondas esféricas.

O princípio utilizado para o estudo da difracção é baseado neste princípio, mas é um pouco mais elaborado: Em cada ponto, o valor da amplitude da onda é dada pela soma das amplitudes de todas essas ondas geradas pelas fontes pontuais consideradas.

Este princípio é designado por princípio de Huygens-Fresnel.



A geometria do problema que iremos considerar é a seguinte:

Temos uma frente de onda (conhecida) num plano $z = 0$, e descrita pela função $\tilde{g}(x_0, y_0)$ (nas coordenadas x_0, y_0). Pretendemos saber a descrição dessa frente de onda num outro plano, à uma distância z do primeiro.

De um modo simplista, o que temos de fazer é somar as contribuições de todas as fontes pontuais, sendo que cada fonte emite uma onda esférica.

Já vimos anteriormente que as ondas esféricas são descritas por expressões do tipo:

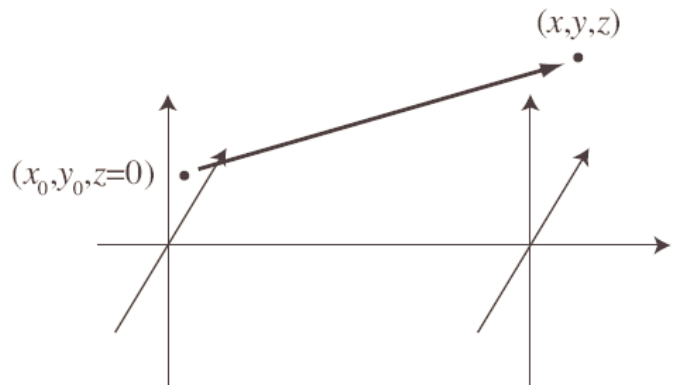
$$\psi = \psi_0 \frac{\lambda}{r} \exp[-i(kr - \omega t)]$$



Então, somando as contribuições de todas as fontes, e ignorando a variação temporal ($\exp(i\omega t)$), obtemos:

$$\psi(x, y, z) = \psi_0 \frac{\lambda}{A} \int_{x_0} \int_{y_0} \tilde{g}(x_0, y_0) \frac{\exp[-ikr]}{r} \cos \theta$$

Em que A representa um factor de normalização (divide o integral a 2 dimensões pela área da fonte) e em que factor $\cos \theta$, representa um factor de obliquidade, que normalmente pode ser ignorado (Este factor representa a inclinação do plano z em relação ao plano z_0 , o que normalmente é zero).



A irradiância que iremos observar no plano z será naturalmente:

$$I = \psi \cdot \psi^*$$

Voltemos a olhar para a geometria:

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2}{z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{z^2}}$$

No limite em que $[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \ll z^2$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} r &\simeq z \left[1 + \frac{(x - x_0)^2}{2z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2z^2} - \frac{(x - x_0)^4}{8z^4} - \frac{(y - y_0)^4}{8z^4} + \dots \right] \\ &\simeq z \left[1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z^2} - \frac{xx_0 + yy_0}{z^2} \right] \end{aligned}$$

O facto de estarmos a ignorar os termos em x^4/z^4 significa que esta aproximação só é válida para $z^3 \gg \frac{a^4}{2\lambda}$ (em que a representa as dimensões máximas da função $\tilde{g}(x_0, y_0)$). Isto significa que esta teoria não é válida para distâncias muito pequenas (entre a fonte e o alvo)!

Se agora escrevermos:

$$kr \simeq \frac{2\pi z}{\lambda} \left[1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z^2} - \frac{xx_0 + yy_0}{z^2} \right]$$

podemos utilizar esta aproximação para reescrever o integral anterior: (O termo $1/r$ será aproximado apenas por $1/z$).

$$\psi(x, y, z) = \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_{x_0} \int_{y_0} \tilde{g}(x_0, y_0) \exp \left[-i \frac{2\pi z}{\lambda} - i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} - i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda z} + i2\pi \frac{xx_0 + yy_0}{\lambda z} \right]$$

Retirando do integral os termos que não dependem de x_0, y_0 , obtemos:

$$\psi(x, y, z) = \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \exp \left[-i \frac{2\pi z}{\lambda} \right] \exp \left[-i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right] \int_{x_0} \int_{y_0} \tilde{g}(x_0, y_0) \exp \left[-i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda z} \right] \exp \left[i2\pi \frac{xx_0 + yy_0}{\lambda z} \right]$$

Este é o integral de difracção de Fresnel-Kirchoff. Os termos de fase fora do integral não interessam quando pensamos na irradiância, por esse motivo é habitual “esquecê-los”.

$$\psi(x, y, z) = \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_{x_0} \int_{y_0} \tilde{g}(x_0, y_0) \exp \left[-i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda z} \right] \exp \left[i2\pi \frac{xx_0 + yy_0}{\lambda z} \right]$$

Esta é a forma do integral que iremos utilizar para distâncias $z^3 \gg \frac{a^4}{2\lambda}$.

Mas quando a distância é maior, de tal modo que $z \gg \frac{4a^2}{\lambda}$, podemos ainda fazer outra aproximação [de Fraunhofer] que corresponde a ignorar o 1º termo de fase dentro do integral:

$$\psi(x, y, z) \simeq \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_{x_0} \int_{y_0} \tilde{g}(x_0, y_0) \exp \left[i2\pi \left(\frac{xx_0}{\lambda z} + \frac{yy_0}{\lambda z} \right) \right] dx_0 dy_0$$

Vocês talvez reconheçam o integral desta última expressão. Este integral é, nada mais, nada menos, que a Transformada de Fourier de $\tilde{g}(x_0, y_0)$. Ou seja, o padrão de difracção, na região de Fraunhofer é a TF da função que descreve a distribuição de entrada!

Talvez seja útil escrever o último integral na forma:

$$\begin{aligned}\psi(x, y, z) &\simeq \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_{x_0} \int_{y_0} \tilde{g}(x_0, y_0) \exp\left[i2\pi\left(\frac{xx_0}{\lambda z} + \frac{yy_0}{\lambda z}\right)\right] dx_0 dy_0 \\ &\simeq \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_{x_0} \int_{y_0} \tilde{g}(x_0, y_0) \exp\left[i2\pi\left(f_x x_0 + f_y y_0\right)\right] dx_0 dy_0\end{aligned}$$

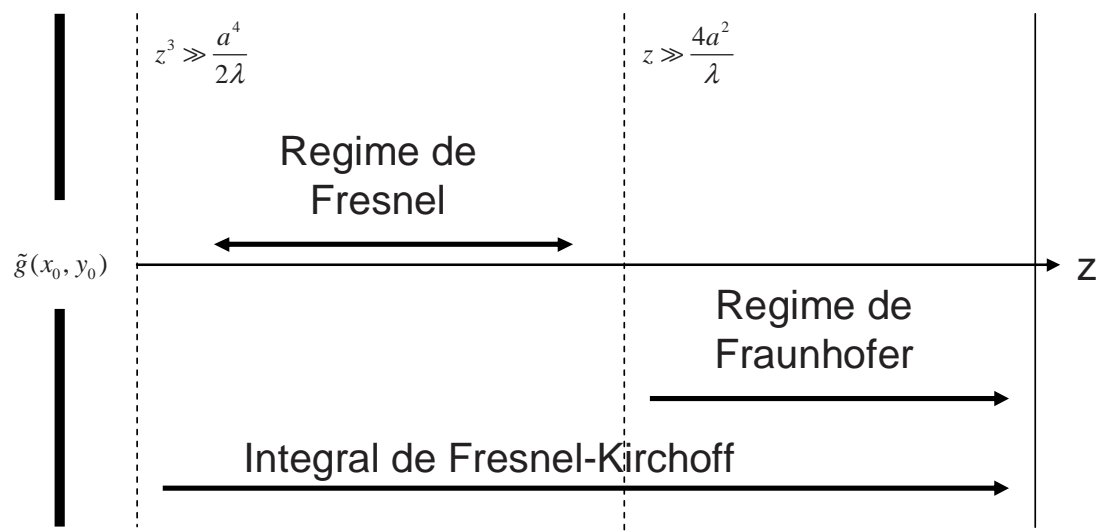
em que apresentamos explicitamente f_x e f_y , as frequências espaciais.

Recordem que a transformada de Fourier de $g(x)$, é dada por:

$$\begin{aligned}G(f) &= \mathcal{F}\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp[i2\pi f x] dx \\ g(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp[-i2\pi f x] df\end{aligned}$$

Este tipo de transformadas permite obter imediatamente os padrões de difracção na região de Fraunhofer.

Em seguida, vamos estudar os padrões que obtemos para diferentes fontes [$\tilde{g}(x_0, y_0)$], nos dois regimes de estudo [habitualmente fala-se na região de Fresnel ou na região de Fraunhofer, apesar de a região de Fresnel na realidade englobar também a região de Fraunhofer].



Vamos começar por estudar o regime de Fraunhofer por este ser consideravelmente mais simples.

Difracção de Fraunhofer

Vamos para já pensar apenas a 1 dimensão, e assumir que a iluminação incidente é uma onda plana.

Difracção por uma fenda simples

Vamos supor que temos uma abertura rectangular, de largura b , e que portanto a função $\tilde{g}(x_0, y_0)$ pode ser escrita como uma função rectangular (Π).

Qual será a sua transformada de Fourier?

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x_0, y_0) e^{i2\pi\left(\frac{xx_0}{\lambda z} + \frac{yy_0}{\lambda z}\right)} dx_0 dy_0 \\ &= \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_{-b/2}^{b/2} e^{i2\pi\frac{xx_0}{\lambda z}} dx_0.\end{aligned}$$

Escrevendo $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$:

$$\begin{aligned}&\int_{-b/2}^{b/2} \cos(Bx_0) dx_0 + i \int_{-b/2}^{b/2} \sin(Bx_0) dx_0 \quad \text{with} \quad B \equiv \frac{2\pi x}{\lambda z} \\ &= \frac{1}{B} \left[\sin(Bx_0) \Big|_{-b/2}^{b/2} - i \cos(Bx_0) \Big|_{-b/2}^{b/2} \right] \\ &= \frac{\lambda z}{2\pi x} \left[\sin\left(\pi \frac{xb}{\lambda z}\right) - \sin\left(-\pi \frac{xb}{\lambda z}\right) - i \cos\left(\pi \frac{xb}{\lambda z}\right) + i \cos\left(-\pi \frac{xb}{\lambda z}\right) \right] \\ &= \frac{\lambda z}{\pi x} \sin\left(\pi \frac{xb}{\lambda z}\right)\end{aligned}$$

Ou seja, o campo eléctrico no plano z será dado por:

$$\psi = \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \frac{b\lambda z}{\pi x b} \sin\left(\pi \frac{xb}{\lambda z}\right)$$

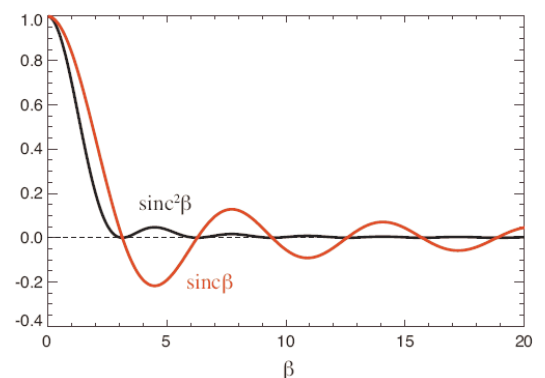
Vamos reescrever isto de outra forma, fazendo $\beta = \frac{\pi b}{\lambda z} x$

$$\psi = \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{b}{A} \frac{\sin \beta}{\beta}$$

Calculando a Irradiância:

$$I \propto \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} = \text{sinc}^2 \beta$$

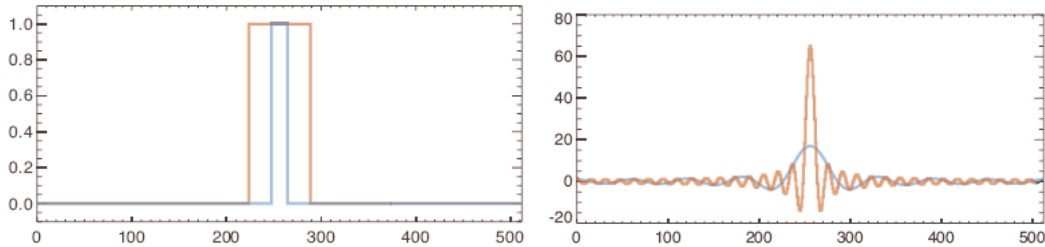
Ou seja, vamos observar um padrão do tipo Sinc²!



Os mínimos desta função vão se localizar nos pontos β tais que $\beta = (m\pi)$, ou

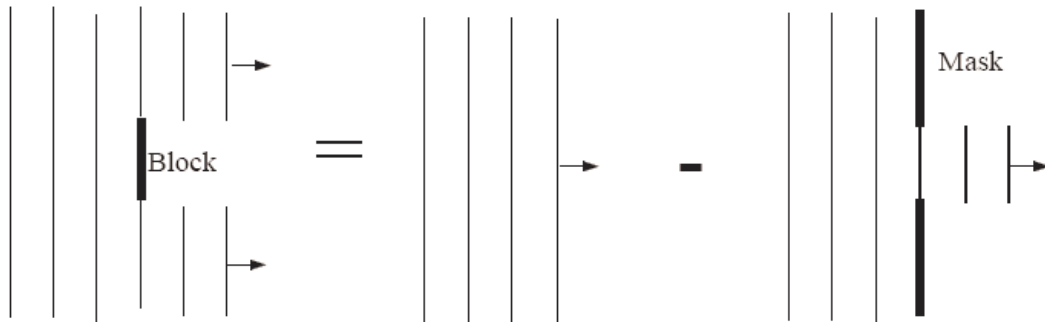
$$\text{seja } x_m = m \frac{\lambda z}{b}$$

Notem que quanto menor for a fenda (menor b), mais largo será o seu padrão de difracção (maior o afastamento entre x_m)!



Vimos portanto o efeito de ter uma abertura rectangular em frente a uma onda plana, por exemplo uma fenda. E se em vez de termos uma fenda tivermos um obstáculo? (por exemplo um fio de cabelo)

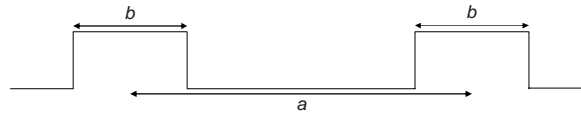
A resposta está no princípio de Babinet, que nos diz o seguinte: O campo eléctrico que temos após o obstáculo pode ser visto como a soma do campo que teríamos se não tivéssemos nenhum obstáculo, menos o campo que obtínhamos se tivéssemos o inverso do obstáculo. Graficamente talvez seja mais fácil entender a ideia:



Ora, o campo que teríamos se não tivéssemos nenhum obstáculo seria uma onda plana. Por outro lado o inverso de um obstáculo é uma fenda, e esse padrão nós já conhecemos! Então campo eléctrico que obtemos depois de um obstáculo é igual a um certo valor médio (a onda plana) menos o padrão que obtemos com uma fenda. Como o que vemos é a irradiância, ou seja o quadrado do campo eléctrico, essa troca de sinal não é importante, e o padrão que obtemos com um obstáculo ou com uma fenda é igual! (Excepto em termos de valor médio, mas se estamos a olhar para o padrão não estamos preocupados com esse detalhe).

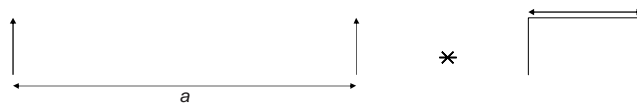
Difracção por duas fendas

Imaginem agora que têm duas fendas, de largura b , separadas por uma distância a .



Temos duas opções, meter esta função no integral e fazer as contas. Ou então, podemos ser mais espertos e recordar o que aprenderam em análise, sobre uma função chamada convolução.

A função que temos em cima pode ser vista como a convolução de duas funções, a função rectângulo Π (que representa as aberturas), convoluída com uma função Π que “posiciona” cada uma das fendas (essa função Π é simplesmente composta por duas funções Delta de Dirac):



Usando a propriedade das transformadas de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(f) G(f)$$

Então, como já sabemos a transformada da função rectângulo, só temos que calcular a transformada da função (Π) de “posição”, que é dada simplesmente por:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(a) e^{i2\pi x f_x} dx &= \left[\cos\left(2\pi \frac{a}{2} f_x\right) + i \sin\left(2\pi \frac{a}{2} f_x\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(2\pi \frac{-a}{2} f_x\right) + i \sin\left(2\pi \frac{-a}{2} f_x\right) \right] \\ &= 2 \cos(\pi a f_x) = 2 \cos \alpha \quad \text{with} \quad \alpha \equiv \pi a f_x \end{aligned}$$

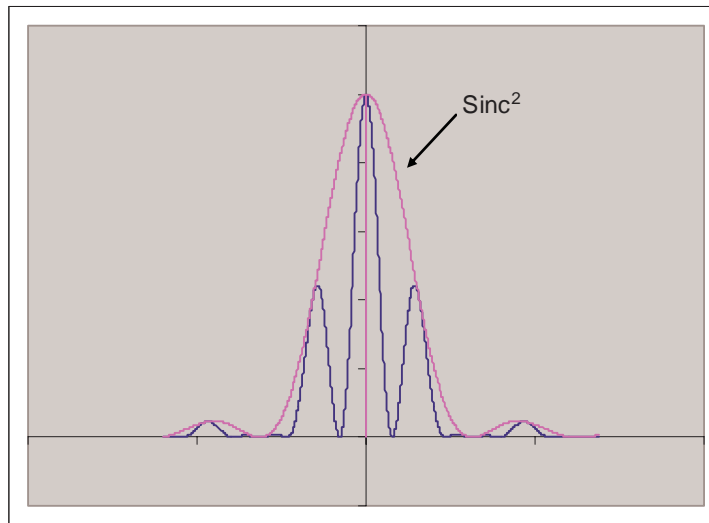
Então o padrão gerado pelas duas fendas será simplesmente o produto da transformada da função rectângulo (representada por Π), pela transformada da função Π .

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} [\Pi(b) * \Pi(a)] e^{i2\pi x_0 f_x} dx_0 \\ &= \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \mathcal{F}\left\{\Pi(b)\right\} \cdot \mathcal{F}\left\{\Pi(a)\right\} \quad (\text{Convolution theorem}) \\ &= \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \frac{\sin \beta}{\beta} 2 \cos \alpha \end{aligned}$$

E a irradiância será:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cos^2 \alpha \quad \text{with} \quad \beta \equiv \pi b f_x \text{ and } \alpha \equiv \pi a f_x$$

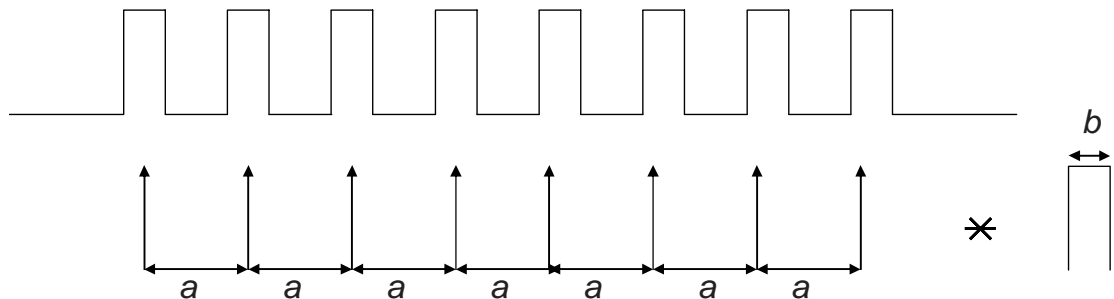
Notem que continuamos a ter o padrão anterior (da função Sinc), mas agora temos esse padrão a ser modulado por uma função Cos. Daqui resulta tipicamente um padrão do tipo:



Notem que os zeros das duas funções são obtidos para valores diferentes, e que podem ocorrer algumas “meias-franjas” quando o zero da função sinc coincide com o máximo da função cos.

Difracção por N fendas

Então e se em vez de serem 2 forem N fendas lado a lado? Podíamos alterar a função II para uma função “pente”:



Mas também podemos utilizar outra propriedade das Transformadas de Fourier: A translação. Se uma fenda estiver centrada em zero o seu padrão é uma sinc, então e se estiver centrada em a ?

$$\mathcal{F}\{g(x - a)\} = \mathcal{F}\{g(x)\}e^{i2\pi\frac{ax}{\lambda z}}$$

Ou seja é a transformada de Fourier de uma fenda centrada em a é igual à transformada de Fourier de uma fenda centrada em 0 a multiplicar por um factor de fase. Se tivermos as N fendas, distribuídas em torno de zero, separadas entre elas por a , teremos que o somatório desses termos de fase:

$$\exp\left[-i\pi N\frac{ax}{\lambda z}\right] \sum_{j=1}^N e^{i2\pi j\frac{ax}{\lambda z}} = e^{-iN\alpha} \sum_{j=1}^N (e^{i2\alpha})^j$$

with $\alpha \equiv \pi\frac{ax}{\lambda z} = af_x$

$$e^{-iN\alpha} \sum_{j=1}^N (e^{i2\alpha})^j = e^{i\alpha} \frac{\sin(N\alpha)}{\sin\alpha}$$

Então o campo eléctrico será dado por:

$$\psi = \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{b}{a} \frac{\sin\beta}{\beta} \frac{\sin(N\alpha)}{\sin\alpha} \quad \text{with} \quad \beta \equiv \pi bf_x \quad \text{and} \quad \alpha \equiv \pi af_x$$

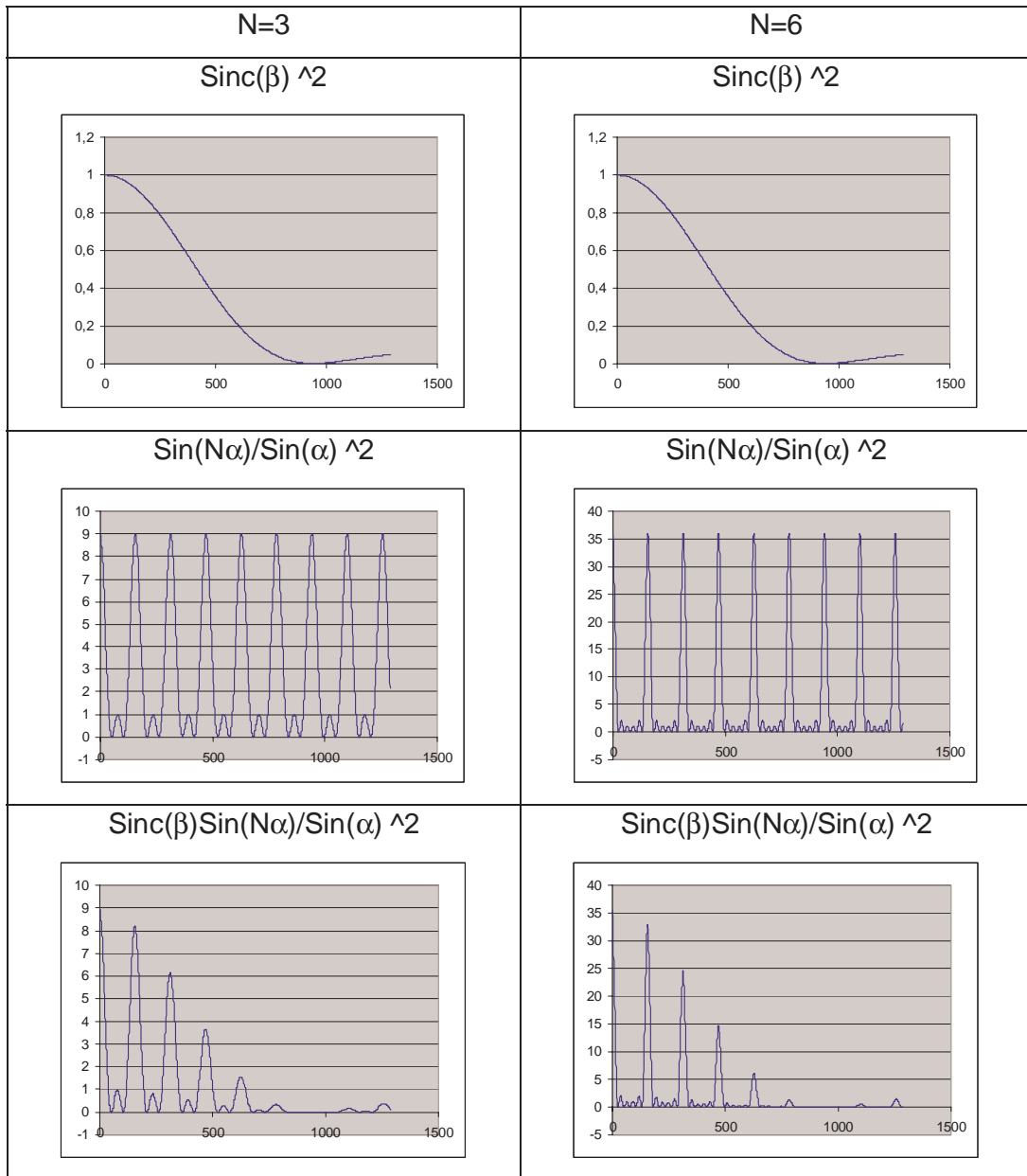
E a irradiância:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin\alpha}\right)^2$$

Continuamos a ter a função sinc, mas desta vez modulada por uma função $\text{Sin}(N\alpha)/\text{Sin}(\alpha)$. Na página seguinte podem ver dois exemplos para valores diferentes de N (3 e 6 fendas).

Antes de começarmos a pensar em como será o padrão de difracção de um orifício circular, vamos começar por pensar como será o padrão de difracção para uma fenda a 2D?

Será a combinação de dois padrões ortogonais! Cada um deles com dimensões determinadas pelas dimensões da abertura nessa dimensão.



Difracção por uma abertura circular

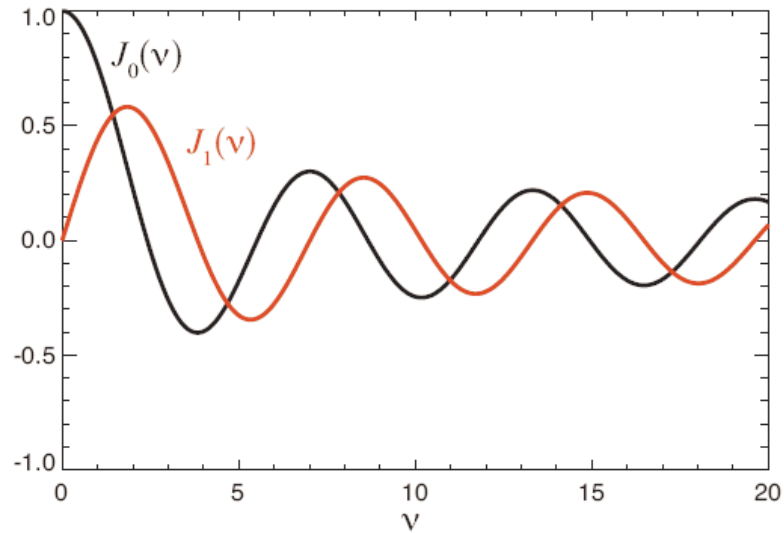
E se a nossa abertura for uma abertura circular? Bom, vamos começar por escrever o integral de Fraunhofer em coordenadas circulares:

$$\psi = \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r_0 dr_0 \tilde{g}(r_0) \tilde{g}'(\theta) e^{i2\pi \frac{rr_0}{\lambda z} (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi)}$$

Se a nossa abertura for um círculo de raio a , então a função $\tilde{g}'(\theta) = 1$. Integrando essa variável, obtemos uma função de Bessel de ordem 0: (não se preocupem com os detalhes matemáticos).

$$J_n(x) \equiv \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \alpha} e^{in\alpha} d\alpha$$

$J_0(\nu)$ and $J_1(\nu)$ look like:



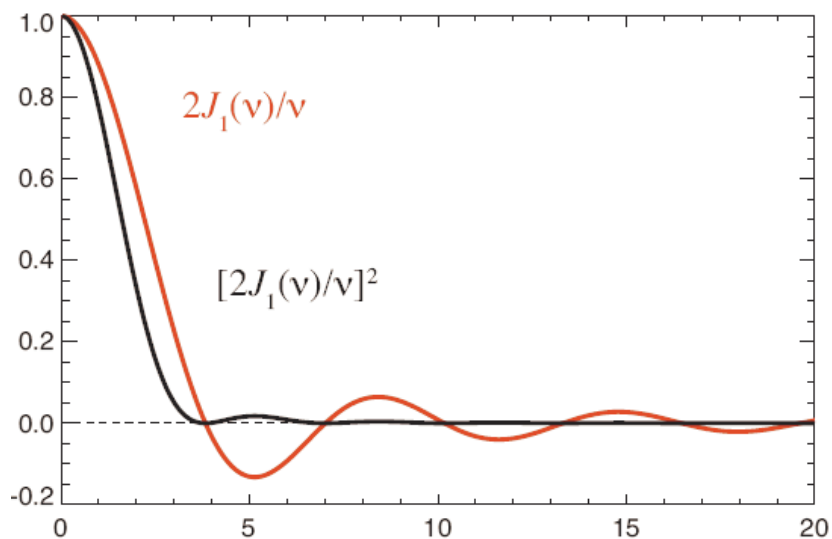
Então o nosso integral transforma-se em:

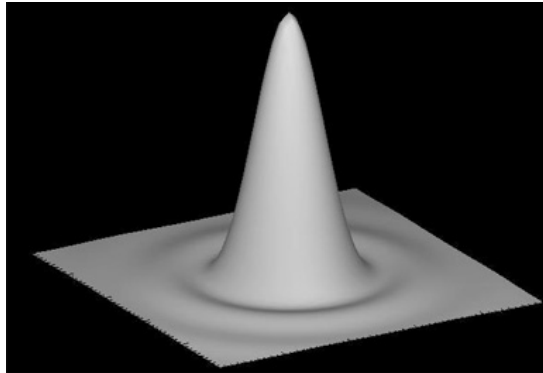
$$\psi = \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_0^\infty r_0 \tilde{g}(r_0) J_0\left(2\pi \frac{rr_0}{\lambda z}\right) dr_0$$

Resolvendo o integral em ordem a r , (não esquecer que a função que define a abertura é $g = 1$ para $r < a$, $g = 0$ para $r > a$):

$$\psi = \psi_0 \frac{\lambda a^2}{z A} \frac{2J_1(\nu)}{\nu} \quad \text{where} \quad \nu \equiv \frac{2\pi ar}{\lambda z}$$

$2J_1(\nu)/\nu$ é a função de Airy. A intensidade será naturalmente proporcional ao quadrado dessa função:





O primeiro zero função estará em: $\nu = 1.22\pi = 3.83$. Se pensarmos que temos uma lente de raio a , então podemos concluir que não vamos obter um ponto no plano focal (tal como a óptica geométrica prevê), mas sim uma distribuição que é dada pela função de Airy (tal como é previsto pela difracção, e tal como se verifica na realidade!).

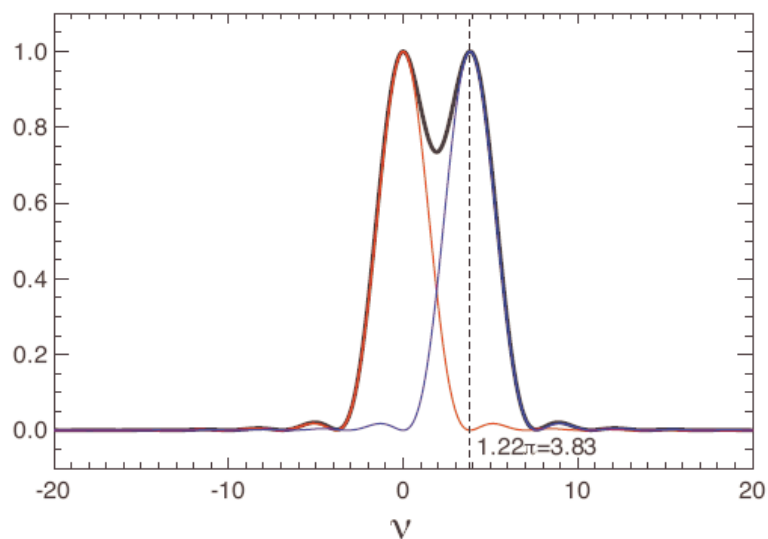
Escrevendo a expressão que relaciona ν com o raio do primeiro zero:

$$\frac{2\pi a r_{\text{first min}}}{\lambda f} = 1.22\pi$$

$$2 \frac{a}{f} \frac{r_{\text{first min}}}{\lambda} = 1.22$$

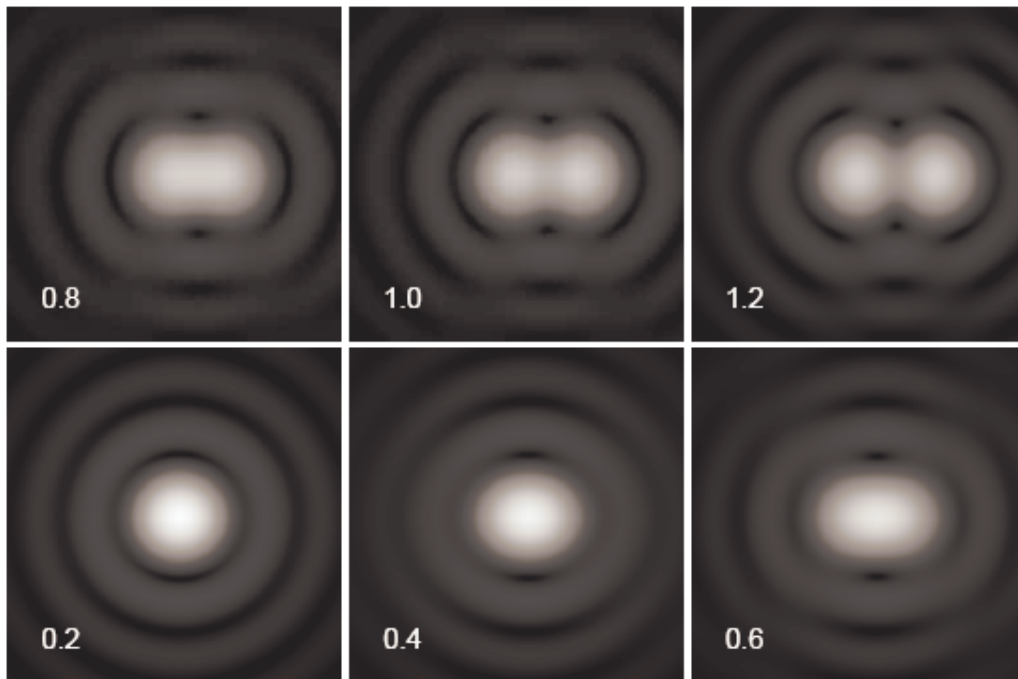
$$r_{\text{first min}} = 0.61 \frac{\lambda}{\text{N.A.}} \quad \text{where} \quad \text{N.A.} = \frac{a}{f}$$

Temos assim uma expressão que nos relaciona o raio do primeiro zero com a Abertura Numérica desta lente. Vamos agora usar esta expressão para voltar a falar do limite de resolução.



O critério de Rayleigh estabelece que dois pontos são resolúveis se estiverem separados por uma distância que seja no mínimo $r_{\text{first min}}$. Daqui resulta que quanto maior for a N.A. maior será a resolução do sistema (porque o valor de $r_{\text{first min}}$ será menor). Dito de outra maneira, entre duas lentes com a mesma distância focal, a que tiver um maior raio será a que permite obter uma melhor resolução! (Mas ao aumentarmos o tamanho das lentes temos que pensar nas aberrações...)

Na figura seguinte podem-se ver os padrões obtidos para diferentes separações entre dois pontos. Os valores apresentados nas figuras são os múltiplos de $r_{\text{first min}}$. O limite de resolução de Rayleigh corresponde à situação 1.0.



Vamos agora fazer uma estimativa rápida da resolução do olho humano. O diâmetro do olho é de cerca de 20 mm e o diâmetro da pupila é da ordem dos 3 mm. A NA, como já vimos anteriormente é dada por:

$$\text{N.A.} = n \sin \theta = 1.3 \frac{0.5 \cdot 3 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 0.0975$$

Daí que a distância mínima será: $r_{\text{first min}} = 3 \mu\text{m}$ (para $\lambda = 500 \text{ nm}$). Este é exactamente o tamanho dos cones na nossa retina! Será que o olho humano conhece a teoria de Rayleigh?

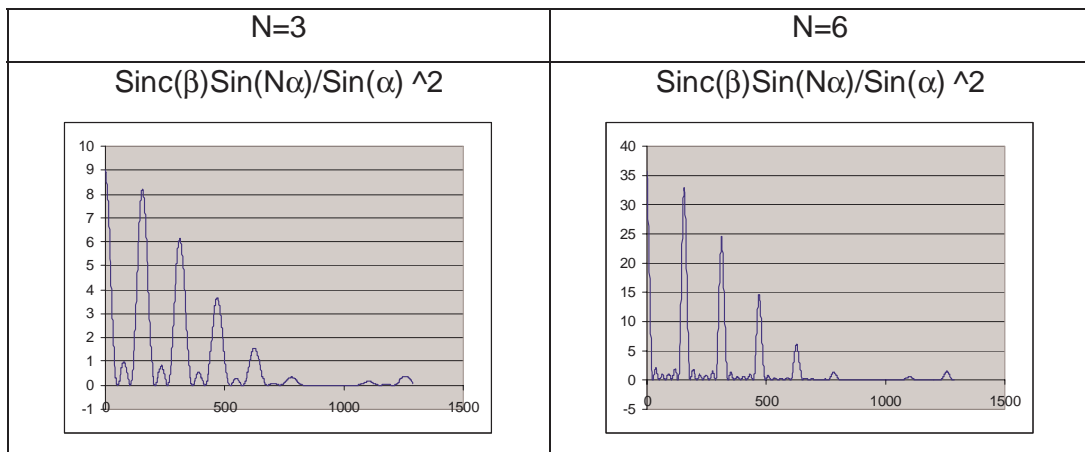
Continuando com este exercício, pensemos qual é o tamanho correspondente a esses $3\ \mu\text{m}$, para um objecto que se situe a 25 cm do olho? Esse tamanho será de $38\ \mu\text{m}$ (óptica geométrica). $38\ \mu\text{m}$ são aproximadamente $1/670$ de uma polegada. Novamente, não é por acaso que as impressoras têm 600 pontos por polegada!

Na próxima aula iremos falar de redes de difracção e em seguida falar da difracção no regime de Fresnel.

Óptica

Difracção 2

Já falamos anteriormente sobre o que acontece quando temos N fendas, de largura a , separadas por uma distância b . Vejamos novamente os gráficos que tínhamos para 3 e 6 fendas:



Parece lógico que para um número elevado de fendas, teremos apenas uma série de “ordens” brilhantes. Mas vamos ver o que se passa de uma forma mais formal (recorrendo apenas à teoria sobre interferência que discutimos anteriormente):

Se tivermos duas fendas, separadas por uma distância d , a diferença de fase entre elas, para um ângulo θ será:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

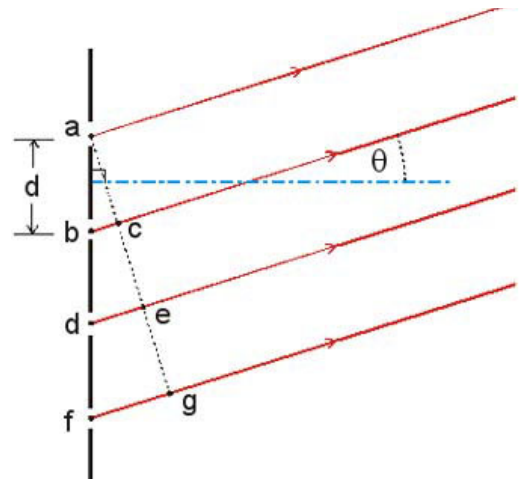
Entre a primeira e a 3ª fenda teremos uma diferença de fase 2δ , e assim sucessivamente.

A soma de todos esses campos eléctricos será:

$$A = A_0(1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta}) = A_0 \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}$$

E a intensidade (proporcional ao quadrado do campo), será:

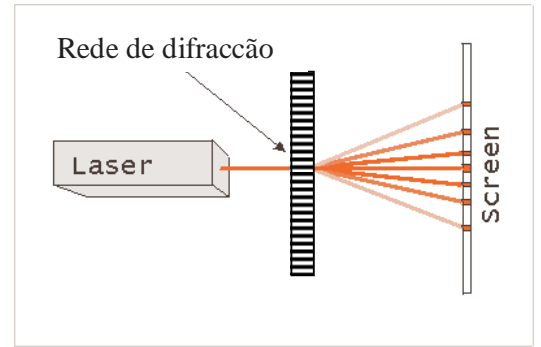
$$I(\theta) = A_0^2 \frac{1 - \cos(N\delta)}{1 - \cos(\delta)} = A_0^2 \frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2 \gamma} \quad \text{em que } \gamma = \delta/2$$



Os máximos desta expressão estarão localizados em pontos que respeitem a relação:

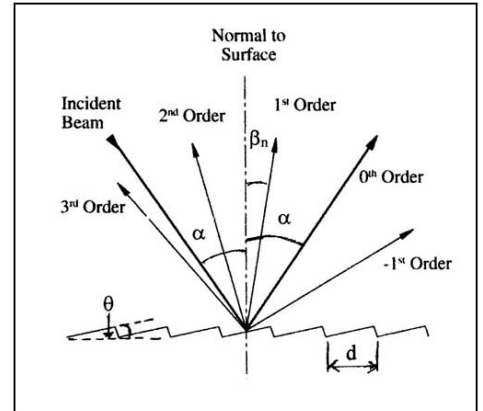
$$d \sin \theta = n \lambda$$

em que n é um número inteiro (positivo ou negativo). Diz-se que n é a ordem de difracção.

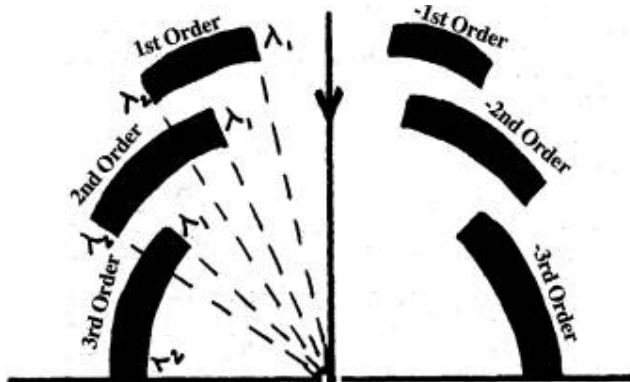


Notem que diferentes λ darão origem a diferentes θ , ou seja, para diferentes comprimentos de onda iremos observar os “picos” em posições diferentes. É assim que funciona a maior parte dos espectrómetros: fazem a luz passar por uma rede de difracção e medem o ângulo θ (de desvio da luz).

Na realidade, a maior parte desses instrumentos funciona com redes que funcionam em reflexão, e não com redes de transmissão. Essas redes em reflexão são, de um modo simplista, espelhos “em degrau”, em que o ângulo (θ) e a largura (d) dos degraus é da ordem do comprimento de onda. (Não iremos aqui entrar em mais detalhes sobre este tipo de redes, por falta de tempo).



Uma questão importante, quando se utilizam redes de difracção em espectrómetros (para separar comprimentos de onda), é que é necessário ter cuidado para que uma ordem de difracção não se sobreponha à outra (isto pode acontecer para diferentes λ).



Vamos deixar por aqui o estudo da difracção no regime de Fraunhofer e falar, rapidamente, da difracção no regime de Fresnel.

Difracção de Fresnel

Recordemos que o integral de Fresnel é (para distâncias $z^3 \gg \frac{a^4}{2\lambda}$):

$$\psi(x, y, z) = \psi_0 \frac{\lambda}{z} \frac{1}{A} \int_{x_0} \int_{y_0} \tilde{g}(x_0, y_0) \exp \left[-i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda z} \right] \exp \left[i2\pi \frac{xx_0 + yy_0}{\lambda z} \right]$$

Vamos considerar, tal como fizemos até aqui, que temos uma onda plana a iluminar uma abertura, então podemos escrever o integral anterior simplesmente como:

$$\int \int_{x_0 y_0} 1 \cdot \exp \left[-i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda z} \right] \cdot \exp \left[-i2\pi \frac{xx_0 + yy_0}{\lambda z} \right] dx_0 dy_0$$

Se quisermos saber apenas a intensidade para $x = 0, y = 0$ (no centro do alvo), podemos escrever:

$$\int \int_{x_0 y_0} 1 \cdot \exp \left[-i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda z} \right] dx_0 dy_0$$

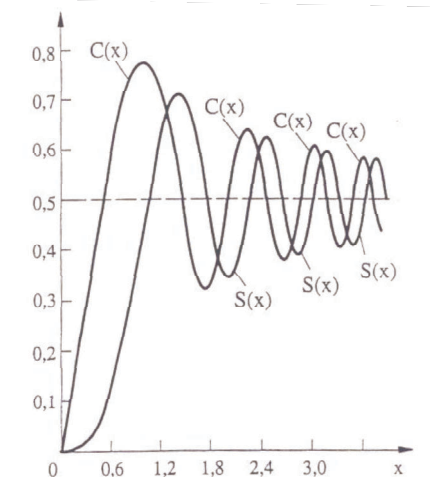
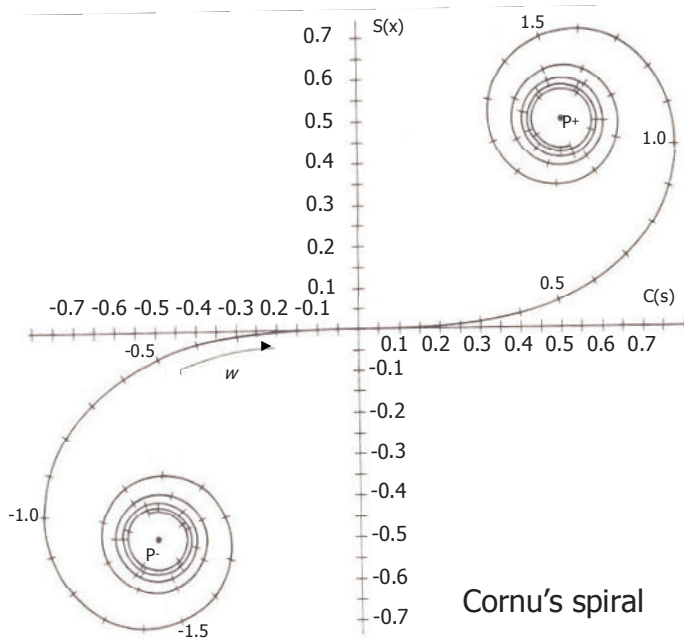
$$\int_{x_0} \exp \left[-i\pi \frac{x_0^2}{\lambda z} \right] dx_0 \int_{y_0} \exp \left[-i\pi \frac{y_0^2}{\lambda z} \right] dy_0$$

$$\int_{x_0} \cos \left[-i\pi \frac{x_0^2}{\lambda z} \right] + i \sin \left[-i\pi \frac{x_0^2}{\lambda z} \right] dx_0 \int_{y_0} \cos \left[-i\pi \frac{y_0^2}{\lambda z} \right] + i \sin \left[-i\pi \frac{y_0^2}{\lambda z} \right] dy_0$$

$$\left[C(s_x) + iS(s_x) \right]_{x_1}^{x_2} \left[C(s_y) + iS(s_y) \right]_{y_1}^{y_2}$$

$$\text{Com } s_x = -i\pi \frac{x_0^2}{\lambda z}; \quad s_y = -i\pi \frac{y_0^2}{\lambda z}$$

Os valores de C e de S podem ser consultados em tabelas, ou obtidos através da Espiral de Cornu.

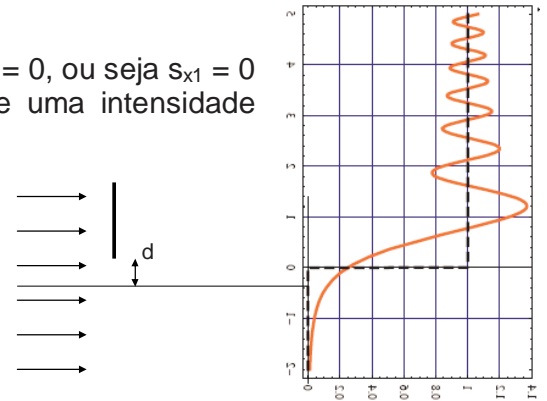


Ainda assim, os padrões de difracção são difíceis de calcular. Vejamos um exemplo: vamos calcular o padrão de difracção para um plano que obstrua metade da fonte:

Nesse caso podemos começar por calcular para $d = 0$, ou seja $s_{x1} = 0$ e $s_{x2} = \infty$. A partir da espiral de Cornu obtém-se uma intensidade $I = 0,25$.

Para os restantes pontos, o cálculo é idêntico, e podemos obter o gráfico que é apresentado ao lado.

Se isto lhes parece complicado, então no caso das aberturas circulares é ainda muito pior!



Utilizando um sistema de coordenadas cilíndricas (r_0, θ, z_a) , para uma abertura com raio R , podemos escrever para o centro do alvo:

$$U_P = -iU_{P_0} \int_0^{\psi_0} \exp(i\psi) Q(\psi) d\psi$$

em que utilizamos a variável auxiliar $\psi = kr_0^2/(2z_a)$, e $\psi_0 = kR^2/2z$

Este integral é habitualmente dividido em zonas, umas em que a parte real de $(i\psi)$ é positivo, e outras em que é negativo (umas contribuem positivamente para o campo eléctrico, outras negativamente).

Se o número de zonas for elevado, então elas vão se anulando umas às outras, sendo o valor no final aproximadamente igual a metade do valor correspondente à zona central.



Não vamos aqui falar mais sobre isto, é demasiado complexo e demorado para esta cadeira, mas vamos apenas referir uma aplicação: as lentes de Fresnel.

Acabamos de dizer que temos zonas que contribuem positivamente para o campo, e outras que contribuem negativamente. Então e se taparmos as negativas? Só vamos ter o campo eléctrico a somar-se, o que é equivalente a dizer que vamos estar a concentrar a luz no centro. Ora isso é uma lente, certo?

Na realidade, normalmente não se tapam as zonas negativas, mas sim aplica-se-lhes um termo adicional de fase de π radianos, ou seja troca-se o sinal dessas contribuições, tornando-as também positivas! Consegue-se assim uma eficiência acrescida.