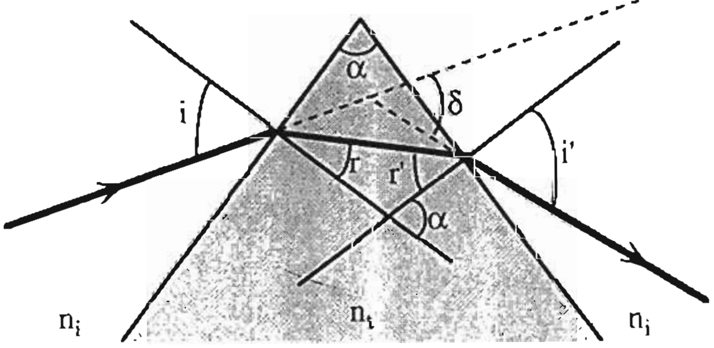
OPTICA

TP3

1 - Calcule o desvio δ sofrido por um feixe que atravessa um prisma do ângulo α e índice n.

Um prisma óptico é um dieléctrico limitado por duas faces planas que se intersectam segundo um ângulo α (ângulo do prisma).



Considere-se luz monocromática e o índice de refracção do prisma relativamente ao meio circundante ($n = n_t/n_i$). A refracção de um raio óptico através do prisma conduz a dois desvios sucessivos. Tem-se:

$$\alpha = r + r'$$

$$\delta = (i - r) + \left(i' - r'\right)$$

Donde:

$$\delta = i + i' - \alpha$$

onde:

$$\sin(i) = n \ \sin(r) \qquad \sin\left(i'\right) = n \ \sin\left(r'\right)$$

Para haver raio emergente, então $r' \le \theta_c$ (ângulo crítico); como se tem sempre $r < \theta_c$, deve ser:

$$\alpha = r + r' \le 2\theta_c$$

e ainda, para que $r' = \theta_c$, vem $r = \alpha - \theta_c$, donde $\sin(i_{min}) = n \sin(\alpha - \theta_c)$, ou:

$$i_{min} = \arcsin\left[n \cdot \sin(\alpha - \theta_c)\right]$$

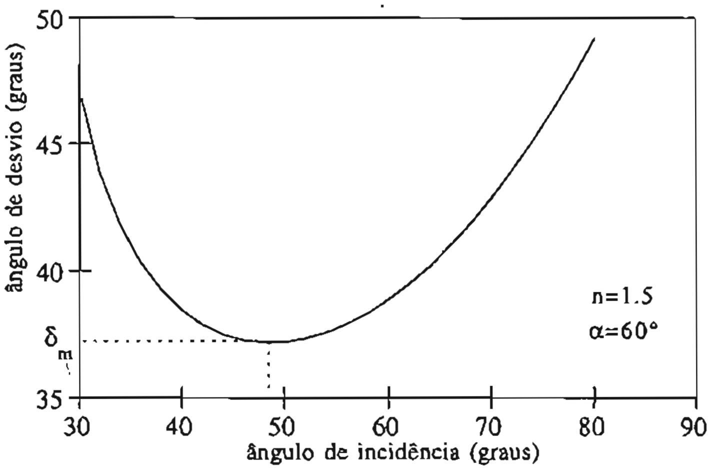
$$i' = \arcsin\left[n \cdot \sin\left(r'\right)\right] = \arcsin\left[n \cdot \sin(\alpha - r)\right] =$$

$$= \arcsin\left[\sin(\alpha) \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2(i)} - \sin(i) \cdot \cos(\alpha)\right]$$

obtem-se:

$$\delta = i + \arcsin\left[\sin(\alpha) \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2(i)} - \sin(i) \cdot \cos(\alpha)\right] - \alpha$$

Como $\delta(n,\alpha,i)$ e o vidro apresenta dispersão ($n=n(\lambda)$), teremos $\delta=\delta(\lambda)$. Para luz monocromática, e α e n constantes, $\delta=\delta(i)$. Esta função apresenta um mínimo (δ_m).



Como:

$$\delta = i + i' - \alpha$$

Vem:

$$\frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

Mas

$$\begin{cases} \cos(i) \cdot di = n \cdot \cos(r) \cdot dr \\ \cos\left(i'\right) \cdot di' = n \cdot \cos\left(r'\right) \cdot dr' \\ dr = dr' \end{cases}$$

Dividindo membro a membro:

$$\frac{\cos\left(i'\right) \cdot di'}{\cos(i) \cdot di} = \frac{\cos\left(r'\right) \cdot dr'}{\cos(r) \cdot dr} = \frac{\cos\left(r'\right)}{\cos(r)}$$

ou seja:

$$\frac{d\delta}{di} = 1 - \frac{\cos\left(r'\right) \cdot \cos(i)}{\cos\left(i'\right) \cdot \cos(r)}$$

Igualando a zero para obtermos o mínimo, obtemos:

$$\cos(i')\cdot\cos(r)=\cos(i)\cdot\cos(r')$$

$$\sqrt{1-\sin^2(i')}\cdot\sqrt{1-\sin^2(r)}=\sqrt{1-\sin^2(i)}\cdot\sqrt{1-\sin^2(r')}$$

Quadrando e utilizando as leis de Snell:

$$\left[1-\sin^2(i')\right]\cdot\left[1-\frac{1}{n^2}\sin^2(i)\right]=\left[1-\sin^2(i)\right]\cdot\left[1-\frac{1}{n^2}\sin^2(i')\right]$$

$$-\sin^2(i)\cdot\left[1-\sin^2(i')\right]+n^2\cdot\left[1-\sin^2(i')\right]=-\sin^2(i')\cdot\left[1-\sin^2(i)\right]+n^2\cdot\left[1-\sin^2(i)\right]$$

$$\sin^2(i)\cdot\left[n^2-1\right]=\sin^2(i')\cdot\left[n^2-1\right]$$

Donde:

$$\begin{cases} i=i' \\ \text{ou} \\ i=-i' \quad\Rightarrow\quad \sin(i)=-\sin(i') \quad\Rightarrow\quad \sin(r)=-\sin(r') \quad\Rightarrow\quad r=r' \quad\Rightarrow\quad \alpha=0 \end{cases}$$

O mínimo de δ é obtido com $i=i'$ (passagem simétrica dos raios ópticos).

Para $i>i'$, $d\delta/di>0$; para $i<i'$, $d\delta/di<0$; logo $\delta(i)$ tem um mínimo para $i=i'$ (o que se poderia verificar calculando $d^2\delta/di^2$).

Note-se que, experimentalmente, é verificada a existência de apenas um mínimo de $\delta(i)$. Atendendo à reversibilidade dos raios ópticos, se $\delta=\delta_m$ para $i\neq i'$ haveria dois mínimos; logo, deverá ser $i=i'$.

Para um prisma, o índice de refracção é expresso em função do ângulos do prisma (α) e de desvio mínimo (δ_m) pela seguinte expressão:

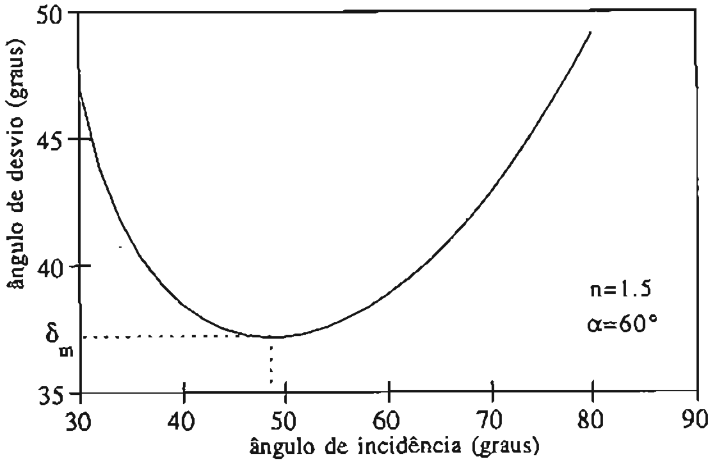
$$n=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta_m+\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

δ_m será dado por:

$$\delta_m=2\cdot\operatorname{Arcsen}\left(n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)-\alpha$$

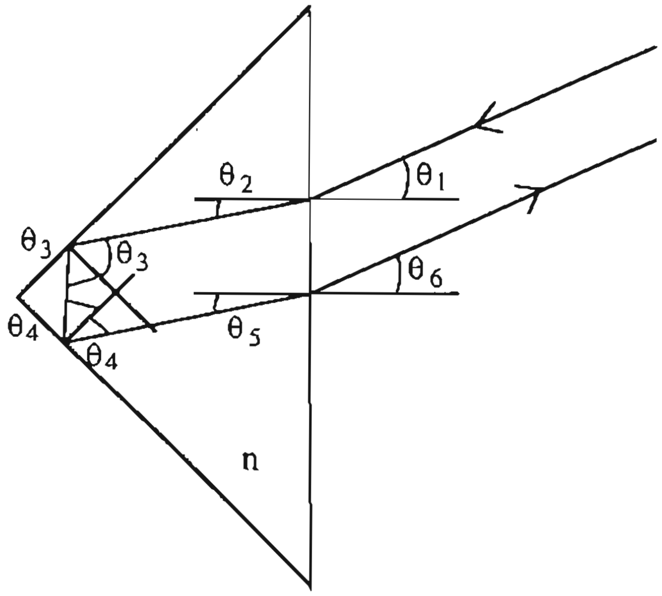
Teremos então, após substituição, $\delta_m\approx 37°$.

O ângulo de desvio varia com o ângulo de incidência da forma indicada no gráfico seguinte.



② Analise o que se passa num "Corner Cube Reflector" ("espelho de canto de cubo").

Vamos analisar o problema apenas no plano horizontal. No plano vertical, o feixe sofre igualmente duas reflecções.



A lei de Snell da refracção impõe:

$$n \cdot \text{sen}(\theta_2) = \text{sen}(\theta_1)$$

$$n \cdot \text{sen}(\theta_5) = \text{sen}(\theta_6)$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos:

$$90° - \theta_3 + 45° + 90° + \theta_2 = 180°$$

$$\rightarrow \quad \theta_3 = 45° + \theta_2$$

$$90° - \theta_3 + 90° + 90° - \theta_4 = 180°$$

$$\rightarrow \quad \theta_4 = 90° - \theta_3$$

$$90° - \theta_4 + 45° + 90° - \theta_5 = 180°$$

$$\rightarrow \quad \theta_5 = 45° - \theta_3$$

Utilizando as equações anteriores, obtemos θ_5 em função de θ_2:

$$\theta_5 = 45° - 90° + 45° + \theta_2 = \theta_2$$

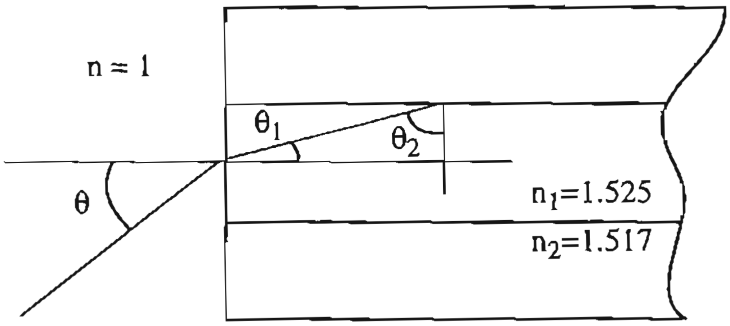
Obtemos assim:

$$n \cdot \text{sen}(\theta_5) = n \cdot \text{sen}(\theta_2) = \text{sen}(\theta_6) = \text{sen}(\theta_1)$$

A última igualdade impõe $\theta_1 = \theta_6$ q.q.d.

(3) Calcule a abertura numérica de uma fibra com índices $n_1 = 1{,}525$ $n_2 = 1{,}517$

Problema 2.7



A abertura numérica (NA) é definida como:

$NA = n \cdot sen\ (\theta)$

Teremos reflexão total na interface entre o núcleo e a baínha quando o ângulo θ_2 satisfizer a seguinte condição:

$$\theta_2 \geq \mathrm{Arcsen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Os ângulos θ, θ_1 e θ_2 estão relacionados pelas relações:

$n \cdot sen\ \theta = n_1 \cdot sen\ \theta_1$ e $\theta_2 = 90° - \theta_1$

O ângulo externo limite (θ_L), para reflexão total na interface entre núcleo e baínha, será obtido através de substituição sucessiva, ou seja:

$$\theta_{2L} = \mathrm{Arcsen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 90° - \theta_{1L} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_1} = \mathrm{sen}(90° - \theta_{1L}) = \cos(\theta_{1L}) = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2(\theta_{1L})}$$

$$n_2^2 = n_1^2 - n_1^2 \cdot \mathrm{sen}^2(\theta_{1L}) \quad \Rightarrow \quad n_1 \cdot \mathrm{sen}(\theta_{1L}) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Teremos assim:

$$NA = n \cdot \mathrm{sen}(\theta_L) = n_1 \cdot \mathrm{sen}(\theta_{1L}) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Substituindo os valores de n, n_1, e n_2 obtemos NA = 0.156.