



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

O PROBLEMA DE HILBERT GENERALIZADO

Maurício Duarte Luís Reis
(Licenciado)

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática
Aplicada

Orientador: Doutor Gueorgui Semenovitch Litvinchuk

Co-Orientador: Doutor Amarino Brites Lebre

Júri

Presidente: Doutor Amarino Brites Lebre

Vogais: Doutor Gueorgui Semenovitch Litvinchuk
Doutor Viktor Grigoryevitch Kravchenko
Doutora Maria Amélia Duarte Reis Bastos

Julho de 2004



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

O PROBLEMA DE HILBERT GENERALIZADO

Maurício Duarte Luís Reis
(Licenciado)

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática
Aplicada

Orientador: Doutor Gueorgui Semenovich Litvinchuk

Co-Orientador: Doutor Amarino Brites Lebre

Júri

Presidente: Doutor Amarino Brites Lebre

Vogais: Doutor Gueorgui Semenovich Litvinchuk
Doutor Viktor Grigoryevich Kravchenko
Doutora Maria Amélia Duarte Reis Bastos

Julho de 2004

Resumo

Neste trabalho estudamos as teorias de Noether e de resolubilidade de alguns problemas de limite. Começamos por descrever as teorias de Noether e de resolubilidade de dois problemas de limite binomiais, mais precisamente, os problemas de limite de Hilbert e de Haseman. Depois, além de reunirmos os resultados existentes acerca das teorias de Noether e de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado, obtemos alguns resultados novos.

O nosso principal objectivo é a obtenção dos números de defeito desse problema com um deslocamento linear fraccionário de Carleman de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$), directo ou inverso, sobre a circunferência unitária \mathbb{T} . Para isso começamos por reduzir este problema ao estudo de um operador integral singular com deslocamento. Em seguida usamos o facto bem conhecido de que o estudo de um tal operador pode ser reduzido ao estudo de um operador integral singular (sem deslocamento) cujos coeficientes são funções matriciais. Por fim calculamos os índices parciais das referidas funções matriciais (que, neste caso, podem ser representadas na forma de um produto de uma função matricial Hermiteana com determinante negativo por funções matriciais racionais diagonais) e usamos estes resultados para obter os números de defeito do problema inicial.

Relativamente à teoria de Noether do problema de limite de Hilbert generalizado, obtemos resultados nos casos de um deslocamento não Carlemaniano ou de um deslocamento de Carleman de ordem arbitrária.

Apresentamos também exemplos deste problema, com o deslocamento de Carleman directo $\alpha(t) = -t$ e com o deslocamento de Carleman inverso $\alpha(t) = \frac{1}{t}$, para os quais não são válidas as fórmulas de Gakhov-Coburn.

Palavras Chave

Problemas de limite; Operadores integrais singulares; Deslocamento; Factorização; Teoria de Noether; Teoria de resolubilidade.

Abstract

In this work we study the Noether and the solvability theories of some boundary value problems. We start by describing the Noether and the solvability theories of two binomial boundary value problems, more precisely, the Hilbert and the Haseman boundary value problems. After that, besides from bringing together the existing results about the Noether and the solvability theories of the generalized Hilbert boundary value problem, we obtain some new results.

Our main goal is to obtain the defect numbers of that problem with a direct or inverse linear fractional Carleman shift of order 2 ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$) on the unit circle \mathbb{T} . To this end we start by reducing the mentioned problem to the study of a singular integral operator with shift. Afterwards we use the well known fact that the study of this operator can be reduced to the study of a singular integral operator (without shift) whose coefficients are matrix functions. Finally we compute the partial indices of such matrix functions (which, in this case, can be represented as a product of an Hermitean matrix function with negative determinant by diagonal rational matrix functions) and use these results to obtain the defect numbers of the initial problem.

In what concerns the Noether theory of the generalized Hilbert boundary value problem, we obtain results in the cases of a non-Carleman shift or of a Carleman shift of arbitrary order.

We also give examples of this problem, with the direct Carleman shift $\alpha(t) = -t$ and with the inverse Carleman shift $\alpha(t) = \frac{1}{t}$, for which the Gakhov-Coburn formulas are not valid.

Key Words

Boundary value problems; Singular integral operators; Shift; Factorization; Noether theory; Solvability theory.

Agradecimentos

À Universidade da Madeira (UMa), em particular ao seu Departamento de Matemática e Engenharias (DME).

Ao Instituto Superior Técnico (IST) da Universidade Técnica de Lisboa.

Ao Centro de Matemática Aplicada (CEMAT) do Instituto Superior Técnico.

Ao Professor Doutor Gueorgui Semenovich Litvinchuk, meu orientador, pelo seu incentivo, apoio e orientação constantes e pela confiança que sempre demonstrou no meu trabalho, mesmo estando consciente de todas as minhas lacunas de conhecimento.

Ao Professor Doutor Amarino Brites Lebre, meu co-orientador, pela disponibilidade e pelas suas importantes sugestões sobre como organizar este trabalho, bem como pela difícil tarefa de ler esta tese desde os primeiros esboços, permitindo-me melhorá-la com os seus indispensáveis comentários.

Ao Professor Doutor José Carmo, Presidente do DME - UMa, pelos seus incansáveis esforços para me garantir a disponibilidade necessária para tornar possível a elaboração desta tese, em particular por me ter atribuído uma distribuição de serviço favorável e por ter diligenciado no sentido de assegurar a continuidade do meu orientador ao serviço da UMa numa altura em que esta continuidade exigia grandes esforços burocráticos.

A todos os meus professores e colegas do Departamento de Matemática e Engenharias da Universidade da Madeira, pelos ensinamentos, amizade e apoio demonstrados.

A todos os professores que leccionaram as cadeiras da parte curricular do meu Mestrado, em especial à Professora Doutora Maria Amélia Bastos, por todo o empenho na resolução de várias questões burocráticas e pela preocupação em me garantir uma boa integração nesta instituição.

Ao Professor Doutor António Ferreira dos Santos, pelo seu imprescindível apoio.

Ao Professor Doutor José Mourão, coordenador do Mestrado em Matemática Aplicada do IST.

Aos meus alunos, pela motivação que o prazer de dar-lhes aulas me traz e a quem espero inculcar o gosto pela matemática.

À minha família, pela amizade e dedicação.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Os operadores de deslocamento, conjugação complexa e integral singular de Cauchy	5
1.2 Equações integrais singulares com o núcleo de Cauchy	11
1.2.1 Teoria de Noether	12
1.2.2 Teoria de resolubilidade	15
1.3 Equações integrais singulares com um deslocamento de Carleman	18
1.3.1 Teoria de Noether	18
1.3.2 Teoria de resolubilidade para o caso de um deslocamento linear fraccionário de Carleman	20
1.3.3 Factorização efectiva nos casos de matrizes diagonais e triangulares	37
1.4 Factorização de matrizes de Hermite	41
1.5 Teoria de Noether de equações integrais singulares com um deslocamento não Carlemaniano	42
2 Problemas de limite de Hilbert e Haseman	47
2.1 Problema de limite de Hilbert	48
2.2 Problema de limite de Haseman	55
3 Teoria de Noether e teoria de resolubilidade do problema de limite de Hilbert Generalizado	65
3.1 Teoria de Noether	66
3.2 Teoria de resolubilidade	75
3.2.1 Teoria de resolubilidade no caso de um deslocamento directo	76
3.2.2 Teoria de resolubilidade no caso de um deslocamento inverso	84
Bibliografia	93

Introdução

Seja Γ uma curva simples fechada de Lyapunov que divide o plano complexo, \mathbb{C} , em duas partes D^+ e D^- e seja α um deslocamento, preservando ou mudando a orientação sobre Γ , que satisfaz $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ e $\alpha' \in H_\mu(\Gamma)$. O *problema de limite de Hilbert generalizado* consiste em encontrar uma função

$$\Phi^+(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

analítica no domínio D^+ e tal que os valores limite das suas partes real e imaginária pertençam à classe $H_\mu(\Gamma)$ e satisfaçam, sobre Γ , a condição de limite:

$$a(t)u(t) + b(t)u(\alpha(t)) + c(t)v(t) + d(t)v(\alpha(t)) = h(t), \quad (\text{I})$$

que pode reescrever-se na forma:

$$\text{Re}\{A(t)\Phi^+(t) + B(t)\Phi^+(\alpha(t))\} = h(t), \quad (\text{II})$$

com $A(t) = a(t) - ic(t)$ e $B(t) = b(t) - id(t)$, onde $a, b, c, d, h \in H_\mu(\Gamma)$ são funções reais.

Este problema é uma generalização do problema de limite de Hilbert clássico (caso em que $b = d \equiv 0$), cujas teorias de Noether e de resolubilidade são já bem conhecidas e estão descritas, por exemplo, nos livros de F. D. Gakhov [2] e N. I. Muskhelishvili [32].

Neste trabalho procuramos apresentar resultados em relação às teorias de Noether e de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado enunciado acima. Antes de mais introduzimos algumas definições para esclarecermos em que consiste cada um destes pontos. Assim, o conjunto de todas as funções h para as quais o problema (I) é solúvel chama-se *imagem do problema (I)* e o conjunto de todas as soluções do problema homogéneo ($h \equiv 0$) é designado por *núcleo do problema (I)*. Supondo que a imagem do problema de limite está contida num determinado subespaço L , então esse problema diz-se *normalmente solúvel* se a sua imagem for fechada em L . Os *números de defeito*, l e ρ , de um problema de limite são, respectivamente, as dimensões do seu núcleo e do complemento à sua imagem em L . A diferença entre os números de defeito chama-se *índice*, I , do problema de limite ($I = l - \rho$). A teoria de Noether de um problema de limite engloba a obtenção das condições sob as quais este é normalmente solúvel e tem números de defeito finitos, e o cálculo do seu índice. Quanto à teoria de resolubilidade, esta consiste, essencialmente, no cálculo dos números de defeito, l e ρ do problema de limite. Diz-se que estes números satisfazem as fórmulas de Gakhov-Coburn quando são dados por

$$l = \max(0, I) \quad \text{e} \quad \rho = \max(0, -I). \quad (\text{III})$$

No entanto, também se podem incluir na teoria de resolubilidade questões como a determinação de soluções exactas ou aproximadas e problemas da teoria espectral.

O problema de Hilbert com deslocamento foi enunciado, pela primeira vez, no princípio dos anos 50 por F. D. Gakhov (durante seminários científicos), na forma:

$$b(t)u(\alpha(t)) + c(t)v(t) = h(t) . \quad (\text{IV})$$

A formulação geral ((I) ou (II)), foi proposta por E. G. Khasabov e G. S. Litvinchuk em [10]. Neste artigo foram encontradas as condições de Noether do problema (I) com um deslocamento Carlemaniano de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) = t$), preservando ou mudando a orientação sobre Γ e foi apresentada a teoria de resolubilidade de alguns casos particulares degenerados deste problema que podem ser reduzidos a problemas de limite binomiais.

Mais tarde, no artigo [13] dos mesmos autores, continuando a considerar o problema (I) com um deslocamento Carlemaniano de ordem 2, foram estabelecidas as condições de resolubilidade e obtida a fórmula do índice deste. Além disso, foram considerados exemplos do problema de limite de Hilbert generalizado, tanto com um deslocamento directo como com um deslocamento inverso, para os quais, em geral, o problema não homogéneo (I) pode não ser solúvel, embora o problema homogéneo correspondente tenha soluções não triviais, ou seja, nesses exemplos, ao contrário do que se passa com o problema de limite de Hilbert clássico, os números de defeito, l e ρ , não satisfazem as fórmulas de Gakhov-Coburn (III).

Este trabalho tem por objectivo reunir todos os resultados já conhecidos (referidos acima) relativamente às teorias de Noether e de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado (I), bem como resumir todos os factos preliminares necessários para a compreensão da referida teoria. Procuramos, ainda, obter alguns resultados novos. Mais precisamente, apresentamos a teoria de Noether do problema (I) quando α é um deslocamento não Carlemaniano ou um deslocamento directo de Carleman de ordem $k \geq 2$ e, quanto à teoria de resolubilidade, calculamos os números de defeito l e ρ do problema (I) quando este é considerado sobre a circunferência unitária e o deslocamento α é um deslocamento linear fraccionário de Carleman de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$), preservando ou mudando a orientação, i.e., $\Gamma = \mathbb{T}$ e

$$\alpha(t) = \frac{t - \beta}{\beta t - 1} , \quad \text{com } t \in \mathbb{T} \text{ e } \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T} . \quad (\text{V})$$

Deste modo, começamos por introduzir, no Capítulo 1, toda a informação preliminar essencial para a compreensão dos restantes capítulos. Nomedamente, os conceitos e propriedades básicas acerca do operador integral singular de Cauchy e dos operadores de deslocamento e conjugação complexa, e os factos gerais da teoria de Noether e de resolubilidade de equações integrais singulares com o núcleo de Cauchy e de equações integrais singulares com um deslocamento. Neste último ponto apresentamos alguns resultados da teoria de factorização de operadores integrais singulares com deslocamento linear fraccionário de Carleman de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) = t$). Incluimos ainda, neste capítulo, alguns resultados relativos à teoria de factorização de matrizes com uma forma especial. A generalidade dos factos expostos são já bem conhecidos, no entanto, na Subsecção 1.3.3, apresentamos um

resultado novo sobre a factorização de uma matriz triangular. Relativamente a este capítulo resta-nos salientar que é aqui que serão introduzidas todas as notações e designações que serão utilizadas ao longo de todo o trabalho.

No Capítulo 2 expomos as bem conhecidas teorias de Noether e de resolubilidade dos problemas de limite de Hilbert (clássico) e de Haseman, que no Capítulo 3 sugerirão como casos particulares do problema de limite de Hilbert generalizado.

O Capítulo 3 será dedicado às teorias de Noether e de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado (I).

Assim, na Secção 3.1, estabelecemos as condições de Noether e obtemos a fórmula do índice do problema (I) com um deslocamento Carlemaniano tal que $\alpha(\alpha(t)) = t$, preservando ou mudando a orientação sobre Γ . Terminamos esta secção apresentando alguns resultados novos que consistem nas condições de Noether e a fórmula do índice do problema (I) nos casos em que α é um deslocamento não Carlemaniano ou um deslocamento directo de Carleman tal que $\alpha_k(t) \equiv t$ para $k \geq 2$.

Finalmente, na Secção 3.2, incluímos os resultados conhecidos de [10] sobre a teoria de resolubilidade de alguns casos particulares degenerados deste problema que, devido às condições impostas aos coeficientes, podem ser reduzidos a problemas de limite binomiais, mais precisamente, a problemas do tipo de Carleman e de Hilbert. Além disso, nesta secção, consideramos pela primeira vez a teoria de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado com um deslocamento linear fraccionário de Carleman de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) = t$) preservando ou mudando a orientação sobre a circunferência unitária \mathbb{T} . Mais concretamente, obtemos os números de defeito, l e ρ , do problema (I) quando $\Gamma = \mathbb{T}$ e α é um deslocamento da forma (V).

Relativamente ao caso de um deslocamento directo, o Teorema 3.18, incluído na Subsecção 3.2.1, é aqui apresentado pela primeira vez e o exemplo de [13] do problema (I) com um deslocamento directo é aqui considerado por um outro método (“matricial”) no Exemplo 3.19. Na Subsecção 3.2.2 estudamos o caso de um deslocamento inverso e são novos os Teoremas 3.22 e 3.23, além disso no Exemplo 3.24 aplicamos o “método matricial” referido ao exemplo do problema de Hilbert generalizado com um deslocamento inverso apresentado em [13].

Capítulo 1

Preliminares

Este primeiro capítulo será, essencialmente, uma compilação de definições e resultados básicos indispensáveis à compreensão dos capítulos seguintes. Assim, notamos desde já que, ao longo deste trabalho, serão feitas muitas referências aos conceitos e propriedades aqui expostos além de que é também neste capítulo que são introduzidas todas as notações e designações que serão utilizadas daqui para a frente. Observamos ainda que a generalidade do material aqui incluído é apresentado de forma breve e sem provas, podendo todos estes factos ser encontrados com maior detalhe por exemplo em [26], bem como nas restantes referências citadas ao longo deste capítulo.

Começamos por apresentar, na Secção 1.1, algumas noções e características essenciais do operador integral singular de Cauchy e dos operadores de deslocamento e conjugação complexa.

Em seguida, consideramos as bem conhecidas teorias de Noether e de resolubilidade de equações integrais singulares com o núcleo de Cauchy e de equações integrais singulares com um deslocamento de Carleman ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$), nas secções 1.2 e 1.3, respectivamente. Observamos que, nesta última secção, além de alguns resultados já conhecidos da teoria de factorização de operadores integrais singulares com deslocamento linear fraccionário de Carleman tal que $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ (Subsecção 1.3.2), incluímos, na Subsecção 1.3.3 um resultado novo relativo à factorização de uma matriz triangular.

Finalmente, as secções 1.4 e 1.5 são dedicadas, respectivamente, ao cálculo dos índices parciais de uma função matricial hermiteana com determinante negativo e à teoria de Noether de operadores integrais singulares com um deslocamento não Carlemaniano ou com um deslocamento Carlemaniano de ordem $k \geq 2$.

1.1 Os operadores de deslocamento, conjugação complexa e integral singular de Cauchy

Nesta secção incluímos as definições e as propriedades básicas do operador integral singular de Cauchy e dos operadores de conjugação complexa e de deslocamento.

Consideremos a seguinte definição.

Definição 1.1 (Curva de Lyapunov) *Uma curva de Lyapunov é uma curva simples, orientada (fechada ou aberta), Γ , que admite tangente em qualquer ponto $t \in \Gamma$*

e esta tangente forma com o eixo real um ângulo $\theta(t)$ que satisfaz a condição de Hölder, i.e., existe $A > 0$ tal que

$$|\theta(t_1) - \theta(t_2)| < A|t_1 - t_2|^\mu,$$

para $0 < \mu \leq 1$ e $t_1, t_2 \in \Gamma$.

Uma curva fechada de Lyapunov, Γ , é fronteira de um domínio simplesmente conexo, limitado, no plano complexo \mathbb{C} , que designamos por D^+ . Por D^- denotamos o domínio que é o complementar de $D^+ \cup \Gamma$ no plano complexo estendido.

Neste trabalho assumiremos, sem perda de generalidade que $z = 0 \in D^+$ e $z = \infty \in D^-$. Consideramos a curva Γ orientada de modo que uma rotação ao longo desta deixa o domínio D^+ à esquerda. Designaremos por \mathbb{T} a circunferência unitária, i.e., $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$.

Introduzimos agora os espaços com que iremos trabalhar ao longo deste trabalho.

Chamamos espaço de Hölder, e representamos por $H_\mu(\Gamma)$ o espaço de todas as funções $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfazem a condição de Hölder:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < A|t_1 - t_2|^\mu,$$

para algum $A > 0$, com $0 < \mu \leq 1$ e quaisquer $t_1, t_2 \in \Gamma$. Munido com a norma

$$\|\varphi\|_{H_\mu(\Gamma)} = \max_{t \in \Gamma} |\varphi(t)| + \sup_{\tau, t \in \Gamma} \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t)|}{|\tau - t|^\mu},$$

o espaço $H_\mu(\Gamma)$ é um espaço de Banach.

O espaço $L_p(\Gamma)$ é formado pelas funções, $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, mensuráveis à Lebesgue tais que $\int_\Gamma |\varphi(t)|^p |dt|$ é convergente. $L_p(\Gamma)$ é um espaço de Banach, sendo a norma neste espaço dada por

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p |dt| \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $C(\Gamma)$ denotamos o espaço de Banach de todas as funções contínuas sobre Γ , com a norma

$$\|\varphi\|_{C(\Gamma)} = \max_{t \in \Gamma} |\varphi(t)|.$$

Introduzimos ainda a notação $\mathcal{L}(A, B)$ para representar o espaço dos operadores lineares limitados do espaço A no espaço B , e denotamos $\mathcal{L}(A, A)$ por $\mathcal{L}(A)$.

O operador integral singular de Cauchy, S , é definido por

$$(S\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

onde o integral é considerado no sentido do valor principal de Cauchy. A função $\frac{1}{\tau - t}$ chama-se *núcleo de Cauchy* e a função $\varphi(t)$, chamada *densidade do integral singular*, pertence a um dos espaços $L_p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$) ou $H_\mu(\Gamma)$ ($0 < \mu \leq 1$).

O operador S satisfaz as seguintes propriedades (ver [2], [3]):

- (i) O operador integral singular de Cauchy S é limitado nos espaços $L_p(\Gamma)$ com $1 < p < \infty$ e $H_\mu(\Gamma)$ ($0 < \mu < 1$) e S é um operador linear limitado de $H_1(\Gamma)$ em $H_{1-\varepsilon}(\Gamma)$ onde $\varepsilon > 0$ se $\mu = 1$. Em particular, se $\Gamma = \mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$, então $\|S\|_{L_p(\mathbb{T})} = 1$.
- (ii) Se Γ é uma curva de Lyapunov fechada, então $S^2 = I$ onde I é o operador identidade (S é operador involutivo).
- (iii) O operador $D = aS - SaI$ é compacto em $L_p(\Gamma)$ ou $H_\mu(\Gamma)$ se $a \in C(\Gamma)$ ou $a \in H_\mu(\Gamma)$, respectivamente.

Consideremos agora o integral do tipo de Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

Denotando por $\Phi^+(t)$ e $\Phi^-(t)$ os valores limite, $\lim_{\substack{z \rightarrow t \in \Gamma \\ z \in D^+}} \Phi(z)$ e $\lim_{\substack{z \rightarrow t \in \Gamma \\ z \in D^-}} \Phi(z)$, respectivamente, vejamos qual o comportamento desta função no contorno Γ .

Se $\varphi \in H_\mu(\Gamma)$ ($0 < \mu \leq 1$) então temos o seguinte Teorema de Sokhotsky-Plemeli-Privalov.

Teorema 1.2 *Os valores limite, $\Phi^+(t)$ e $\Phi^-(t)$ existem, tendo-se que $\Phi^\pm(t) \in H_\mu(\Gamma)$ se $0 < \mu < 1$ e $\Phi^\pm(t) \in H_{1-\varepsilon}(\Gamma)$ se $\mu = 1$ e estes valores limite são dados pelas fórmulas de Sokhotsky-Plemeli*

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2} [(I\varphi)(t) + (S\varphi)(t)] \quad , \quad \Phi^-(t) = \frac{1}{2} [-(I\varphi)(t) + (S\varphi)(t)], \quad (1.1)$$

Se $\varphi \in L_p(\Gamma)$, então as fórmulas (1.1) satisfazem-se por quase toda a parte em Γ e as funções $\Phi^\pm(t)$ pertencem ao mesmo espaço $L_p(\Gamma)$.

Como consequência das fórmulas (1.1) temos que:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \quad \text{e} \quad \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = (S\varphi)(t).$$

Decorre das propriedades (i) e (ii) do operador S que os operadores

$$P_+ = \frac{1}{2}(I + S) \quad \text{e} \quad P_- = \frac{1}{2}(I - S) \quad (1.2)$$

são projecções mutuamente complementares nos espaços $H_\mu(\Gamma)$ e $L_p(\Gamma)$ para uma curva fechada Γ .

Para uma exposição mais detalhada das fórmulas de Sokhotsky-Plemeli e das projecções P_\pm ver [2], [3], [32].

Passemos agora a considerar o operador de conjugação complexa, \mathbf{C} , definido por $(\mathbf{C}\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}$. Este operador satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) \mathbf{C} é um operador anti-linear limitado em $L_p(\Gamma)$, $H_\mu(\Gamma)$, $C(\Gamma)$. Sendo linear, nestes mesmos espaços, se for considerado sobre o corpo dos números reais. Os espaços vectoriais reais correspondentes são representados por $\tilde{L}_p(\Gamma)$, $\tilde{H}_\mu(\Gamma)$, $\tilde{C}(\Gamma)$, respectivamente.

$$(ii) \mathbf{C}^2 = I$$

(iii) $\|\mathbf{C}\| = 1$ em qualquer um dos espaços referidos.

Resta introduzir o *operador de deslocamento*. Para isso comecemos pela definição de (função de) deslocamento.

Seja Γ uma curva simples orientada (fechada ou aberta), chamamos *deslocamento* a um homeomorfismo $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Ao longo deste trabalho, a menos que seja referido algo em contrário, assumiremos que a função de deslocamento, α , tem derivada, α' , não nula em Γ e que satisfaz a condição de Hölder sobre Γ , i.e., $\alpha' \in H_\mu(\Gamma)$ e $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Observe-se que a transformação definida pelo deslocamento α , pode preservar ou mudar a orientação considerada na curva Γ .

Chamamos *deslocamento directo* a um deslocamento que preserva a orientação e *deslocamento inverso* a um deslocamento que muda a orientação. Sendo estes denotados por α_+ e α_- , respectivamente.

Definição 1.3 *Seja Γ uma curva fechada orientada e f uma função contínua tal que $f(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. O índice de Cauchy da função f é o número inteiro*

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \{\arg f(t)\}_\Gamma = \text{Ind}_\Gamma f(t)$$

onde $\{\arg f(t)\}_\Gamma$ representa a variação total do argumento da função $f(t)$ quando a variável t varia em Γ no sentido positivo.

De acordo com a definição anterior, temos que

$$\text{Ind}_\Gamma \alpha_+(t) = \frac{1}{2\pi} \{\arg \alpha_+(t)\}_\Gamma = 1 \quad , \quad \text{Ind}_\Gamma \alpha_-(t) = \frac{1}{2\pi} \{\arg \alpha_-(t)\}_\Gamma = -1 .$$

Pode também mostrar-se que

$$\frac{1}{2\pi} \{\arg \alpha'_+(t)\}_\Gamma = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi} \{\arg \alpha'_-(t)\}_\Gamma = -2 . \quad (1.3)$$

Torna-se conveniente apresentar aqui a definição de *ponto periódico*.

Definição 1.4 *Um ponto $\tau \in \Gamma$ chama-se ponto periódico de um deslocamento α , com multiplicidade $k \geq 1$ ($k \in \mathbb{N}$), se $\alpha_k(\tau) = \tau$ e (para $k > 1$) $\alpha_i(\tau) \neq \tau$ para $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ onde $\alpha_i(t) = \alpha(\alpha_{i-1}(t))$ e convenionamos que $\alpha_0(t) \equiv t$.*

Um ponto periódico com multiplicidade 1 chama-se *ponto fixo*.

Apresentamos ainda as seguintes propriedades que são válidas para qualquer deslocamento α :

- α pode ter ou não ter pontos periódicos.
- Se existirem pontos periódicos, ou todos os pontos da curva são pontos periódicos, ou estes formam um certo subconjunto fechado.

- Os pontos periódicos de um deslocamento directo (se existirem) têm todos a mesma multiplicidade.

Definição 1.5 Um deslocamento directo, α , para o qual todos os pontos da curva são pontos periódicos, com uma certa multiplicidade $k \geq 2$, i.e.,

$$\alpha_k(t) = t \quad \forall t \in \Gamma, \quad (1.4)$$

chama-se deslocamento de Carleman.

O menor valor de $k \in \mathbb{N}$ para o qual a condição de Carleman (1.4) é satisfeita chama-se ordem do deslocamento α .

Note-se que um deslocamento de Carleman preservando a orientação não tem pontos fixos.

Quanto aos deslocamentos que mudam a orientação, notemos que, se α é um deslocamento inverso então α_2 é um deslocamento directo (que tem pelo menos um ponto fixo). Neste caso α diz-se um deslocamento de Carleman se $\alpha_2(t) \equiv t$.

Estamos agora em condições de considerar o operador de deslocamento. Seja Γ uma curva simples orientada (fechada ou aberta) e $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma$ um deslocamento tal que $\alpha' \in H_\mu(\Gamma)$ e $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. O operador de deslocamento, W , define-se por

$$(W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t)).$$

Este operador pode ser considerado sobre qualquer um dos espaços $L_p(\Gamma)$ ou $H_\mu(\Gamma)$ e satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) W é um operador linear limitado e continuamente invertível em $L_p(\Gamma)$ e em $H_\mu(\Gamma)$. Se considerarmos o operador de deslocamento dado por $(U\varphi)(t) = |\alpha'(t)|^{\frac{1}{p}} \varphi(\alpha(t))$, este é linear limitado e invertível continuamente em $L_p(\Gamma)$, sendo que $\|U\varphi\| = \|\varphi\|$, isto é, U é um operador isométrico e $\|U\| = 1$.
- (ii) $W_\alpha^m = W_{\alpha_m}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- (iii) Se $\alpha_n(t) \equiv t$ (α é um deslocamento de Carleman) então $W^n = I$. Em particular, para $n = 2$, o operador W satisfaz a condição $W^2 = I$, i.e. é um operador involutivo.

Também serão considerados os espaços de Banach $H_\mu^n(\Gamma)$ e $L_p^n(\Gamma)$ que consistem de vectores n -dimensionais $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ com componentes $u_k \in H_\mu(\Gamma)$ e $u_k \in L_p(\Gamma)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), respectivamente. As normas definidas nestes espaços são dadas por

$$\|u\|_{H_\mu^n(\Gamma)} = \max_{1 \leq k \leq n} \|u_k\|_{H_\mu(\Gamma)} \quad , \quad \|u\|_{L_p^n(\Gamma)} = \max_{1 \leq k \leq n} \|u_k\|_{L_p(\Gamma)} .$$

As propriedades dos operadores S , \mathbf{C} e W anteriormente mencionadas mantêm-se válidas quando estes são considerados nos espaços $H_\mu^n(\Gamma)$ e $L_p^n(\Gamma)$.

Vejam agora algumas propriedades essenciais que relacionam os operadores S , W e \mathbf{C} .

Nos resultados seguintes $\gamma = +1$ ou $\gamma = -1$ se o deslocamento α preserva ou muda a orientação sobre Γ , respectivamente.

Teorema 1.6 *Seja Γ uma curva de Lyapunov simples, α um homeomorfismo de Γ em si mesma, $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ e $\alpha' \in H_\mu(\Gamma)$, $\mu \in (0, 1]$, então os operadores $K_1 = \gamma W S W^{-1} - S$ e $K_2 = S + \mathbf{C} S \mathbf{C}$ são compactos nos espaços $L_p(\Gamma)$ ($H_\lambda(\Gamma)$) e $\tilde{L}_p(\Gamma)$ ($\tilde{H}_\lambda(\Gamma)$), respectivamente, com $\lambda < \mu$.*

Corolário 1.7 *O operador*

$$K_3 = \gamma W S W^{-1} + \mathbf{C} S \mathbf{C}$$

é compacto no espaço $\tilde{L}_p(\Gamma)$ ($\tilde{H}_\mu(\Gamma)$).

Corolário 1.8 *Os operadores*

$$\tilde{K}_1 = \gamma W S - S W \quad , \quad \tilde{K}_2 = \mathbf{C} S + S \mathbf{C}$$

são compactos nos espaços $L_p(\Gamma)$ ($H_\lambda(\Gamma)$) e $\tilde{L}_p(\Gamma)$ ($\tilde{H}_\lambda(\Gamma)$), respectivamente.

Estes corolários resultam do Teorema 1.6 porque $K_3 = K_1 + K_2$ e os operadores \tilde{K}_1 e \tilde{K}_2 são o produto de um operador compacto por um operador limitado, com efeito, $\tilde{K}_1 = K_1 W$ e $\tilde{K}_2 = \mathbf{C} K_2$.

Do corolário anterior resulta ainda que, em geral, a menos de um operador compacto, os operadores W e S comutam se $\gamma = 1$ e anticomutam se $\gamma = -1$ e os operadores S e \mathbf{C} anticomutam.

Do Corolário 1.8 decorre também que

1. $WCS \simeq W(-SC) \simeq -SWC$, $WCP_\pm \simeq W(P_\mp \mathbf{C}) \simeq P_\mp WC$, se $\alpha = \alpha_+$ ($\gamma = +1$),
2. $WCS \simeq -WSC \simeq SWC$, $WCP_\pm \simeq W(P_\mp \mathbf{C}) \simeq P_\pm WC$, se $\alpha = \alpha_-$ ($\gamma = -1$).

No caso particular $\Gamma = \mathbb{T}$ com o deslocamento de Carleman linear fraccionário

$$\alpha(t) = \frac{t - \beta}{\beta t - 1} \quad , \quad t \in \mathbb{T} \quad , \quad \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T} \quad , \quad (1.5)$$

que satisfaz $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ e preserva ou muda a orientação sobre \mathbb{T} conforme $|\beta| < 1$ ou $|\beta| > 1$, respectivamente, podemos escolher funções peso $k_0(t)$, $k_\gamma(t)$ ($\gamma = \pm 1$) tais que os operadores com peso \mathbf{C}_0 e U definidos por $(\mathbf{C}_0 \varphi)(t) = k_0(t) (\mathbf{C} \varphi)(t)$, $(U \varphi)(t) = k_\gamma(t) (W \varphi)(t)$ são involutivos e satisfazem as condições

$$\mathbf{C}_0 S = -S \mathbf{C}_0 \quad , \quad U S = \gamma S U \quad .$$

De facto, se $k_0(t) = \frac{1}{t}$, então $|k_0(t)| = 1$ sobre \mathbb{T} e, por um lado, o operador $(\mathbf{C}_0 \varphi)(t) = \frac{1}{t} \overline{\varphi(\bar{t})}$ é involutivo e, por outro lado, verifica-se que $\mathbf{C}_0 S + S \mathbf{C}_0 = 0$.

Antes de passarmos aos operadores de deslocamento pesados, observamos que o deslocamento linear fraccionário de Carleman (1.5) admite a seguinte factorização

$$\alpha(t) = \alpha^+(t) t^\mu \alpha^-(t) \quad , \quad (1.6)$$

onde $\alpha^+(t) = \lambda(\bar{\beta}t - 1)^{-1}$, $\alpha^-(t) = \lambda^{-1}(t - \beta)t^{-1}$, $\lambda = \sqrt{1 - |\beta|^2}$, $\mu = 1$, se $|\beta| < 1$ e $\alpha^+(t) = (i\lambda)^{-1}(t - \beta)$, $\alpha^-(t) = i\lambda t(\bar{\beta}t - 1)^{-1}$, $\lambda = \sqrt{|\beta|^2 - 1}$, $\mu = -1$, se $|\beta| > 1$. Em ambos os casos as funções $\alpha^+(t)$ e $\alpha^-(t)$ são analíticas nos domínios D^+ e D^- , respectivamente, e não têm zeros. O índice desta factorização é dado pelo factor t^μ ($\text{Ind}_\Gamma \alpha(t) = \mu$) e expressa o facto do deslocamento α preservar ou mudar a orientação sobre \mathbb{T} . Verifica-se ainda que

$$\alpha^\pm(\alpha(t)) = [\alpha^\pm(t)]^{-1}, \quad \text{se } |\beta| < 1$$

e

$$\alpha^\pm(\alpha(t)) = \alpha^\mp(t), \quad \text{se } |\beta| > 1. \quad (1.7)$$

Voltando aos operadores de deslocamento pesados, as funções $k_1(t)$ e $k_{-1}(t)$ contruem-se a partir das factorizações (1.6), mais precisamente, $k_1(t) = -\alpha^+(t)$, se $|\beta| < 1$, e $k_{-1}(t) = \alpha^-(t)t^{-1}$, se $|\beta| > 1$ e verifica-se que $k_\gamma(t)k_\gamma(\alpha(t)) \equiv 1$, $U^2 = I$ e $US = \gamma SU$, $\gamma = \pm 1$.

Considerando o caso $\gamma = 1$ e usando as igualdades $US = SU$ e $S^2 = I$, obtemos que os *símbolos de Hankel*, $P_\mp UP_\pm$, do operador U são iguais a zero sobre a circunferência unitária

$$P_\mp UP_\pm = 0.$$

Quanto ao caso $\gamma = -1$, usando as condições $US = -SU$ e $S^2 = I$, obtemos que os *símbolos de Toeplitz* do operador U são iguais a zero sobre \mathbb{T} , i.e.

$$P_\pm UP_\pm = 0.$$

Finalmente consideramos algumas combinações dos operadores U ($\gamma = \pm 1$) e \mathbf{C}_0 .

$$UC_0S = -SUC_0 \quad \text{e} \quad (UC_0)^2 = -I, \quad \text{se } \gamma = 1$$

$$UC_0S = SUC_0 \quad \text{e} \quad (UC_0)^2 = I, \quad \text{se } \gamma = -1.$$

As provas das propriedades acerca das funções de deslocamento e dos operadores W , S e \mathbf{C} que acabamos de expor podem ser encontradas em [26], [17]. (ver também [8]).

1.2 Equações integrais singulares com o núcleo de Cauchy

Nesta secção vamos estudar as teorias de Noether e de resolubilidade de equações com a seguinte forma

$$(K\varphi)(t) \equiv A(t)\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_\Gamma k(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t) \quad (1.8)$$

onde A, B e k são funções $n \times n$ -matriciais dadas, f é uma função vectorial dada e φ é a função vectorial incógnita.

O operador K chama-se *operador integral singular com o núcleo de Cauchy* e a equação correspondente, (1.8), é chamada *equação integral singular com o núcleo de Cauchy*.

Este operador será considerado sobre os espaços $L_p^n(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$), $H_\mu^n(\Gamma)$ ($0 < \mu \leq 1$), com Γ uma curva fechada de Lyapunov. A função $k(t, \tau)$ é tal que o operador $(D\varphi)(t) \equiv \int_\Gamma k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau$ é compacto no espaço correspondente. Nestas condições verificam-se os seguintes factos:

- (i) Se $A, B \in C^{n \times n}(\Gamma)$ e $D : L_p^n(\Gamma) \rightarrow L_p^n(\Gamma)$ então, representando por $\mathcal{L}(L_p^n(\Gamma))$ o espaço dos operadores lineares limitados de $L_p^n(\Gamma)$ em $L_p^n(\Gamma)$, temos que $K \in \mathcal{L}(L_p^n(\Gamma))$.
- (ii) Se $A, B \in H_\mu^{n \times n}(\Gamma)$ ($0 < \mu \leq 1$) e $D : H_\mu^n(\Gamma) \rightarrow H_\mu^n(\Gamma)$ então $K \in \mathcal{L}(H_\mu^n(\Gamma))$ no caso $0 < \mu < 1$, e $K \in \mathcal{L}(H_1^n(\Gamma), H_{1-\varepsilon}^n(\Gamma))$, no caso $\mu = 1$.

1.2.1 Teoria de Noether

A teoria de Noether de um operador consiste na obtenção das condições de Noether e de uma fórmula para o índice desse operador. Antes de passarmos ao estudo desta teoria para o operador integral K , consideremos as seguintes definições e resultados essenciais da teoria de Noether de operadores lineares limitados em espaços de Banach cujos detalhes e provas podem ser encontrados em [3], [19], [33].

Sejam X_1 e X_2 espaços de Banach e seja $A : X_1 \rightarrow X_2$ um operador linear limitado, i.e. $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Chama-se *núcleo* do operador A ao seguinte subespaço de X_1

$$\ker A = \{x \in X_1 : Ax = 0\}.$$

A *imagem* de A é dada por

$$\operatorname{im} A = \{Ax : x \in X_1\}.$$

Denotamos por $\overline{\operatorname{im} A}$ o fecho do conjunto $\operatorname{im} A$.

O espaço cociente $X_2/\overline{\operatorname{im} A}$ chama-se *conúcleo* do operador A e representa-se por $\operatorname{coker} A$.

A dimensão do subespaço $\ker A$, i.e. o número de soluções linearmente independentes da equação

$$Ax = 0,$$

representa-se por $\alpha(A) = \dim \ker A$ e a dimensão do conúcleo de A , denota-se por $\beta(A) = \dim \operatorname{coker} A$.

Um operador linear limitado $A : X_1 \rightarrow X_2$ chama-se *normalmente solúvel* se $\operatorname{im} A$ é fechada no espaço X_2 , isto é, $\operatorname{im} A = \overline{\operatorname{im} A}$.

Os subespaços $\ker A$ e $\operatorname{coker} A$ chamam-se *subespaços de defeito* do operador A e os números $\alpha(A)$ e $\beta(A)$ chamam-se *números de defeito* do operador A .

Introduzimos agora a definição de *operador Noetheriano* e do seu *índice*.

Definição 1.9 Um operador linear limitado $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ é um operador de Noether¹ se

- (i) A é operador normalmente solúvel.
- (ii) Os números $\alpha(A) = \dim \ker A$ e $\beta(A) = \dim \operatorname{coker} A$ são finitos.

Definição 1.10 O número inteiro $\mathcal{I}(A) = \operatorname{ind} A = \alpha(A) - \beta(A)$ chama-se índice do operador Noetheriano A .

O conjunto dos operadores de Noether definidos em X e com valores em Y será representado por $\Phi(X, Y)$. Se $Y = X$ usaremos $\Phi(X) = \Phi(X, X)$.

Notamos também que uma equação da forma $Ax = y$, onde A é um operador de Noether, chama-se *equação de Noether*, e o número $\operatorname{ind} A$ é também chamado *índice da equação* $Ax = y$.

Definição 1.11 Um operador de Noether com índice zero chama-se operador de Fredholm.

Enunciamos agora algumas propriedades importantes dos operadores de Noether:

1. *Teorema de Dieudonné*: Dado um operador Noetheriano $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, existe um número positivo $\rho(A)$ tal que, se $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ satisfaz a desigualdade $\|B\| < \rho(A)$ então $A + B$ é operador de Noether e $\operatorname{ind}(A + B) = \operatorname{ind} A$.

Este resultado reflecte a estabilidade da propriedade Noetheriana e do índice de um operador sob perturbações por operadores com a norma suficientemente pequena. Deste teorema resulta também que o conjunto dos operadores de Noether é aberto no espaço de todos os operadores lineares limitados.

2. *Teorema de Mikhlin-Atkinson*: Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ é um operador de Noether e $D \in \mathcal{L}(X, Y)$ é um operador compacto, então $A + D$ é um operador Noetheriano e $\operatorname{ind}(A + D) = \operatorname{ind} A$.

Este teorema exprime a estabilidade da propriedade Noetheriana de um operador A e do seu índice sob perturbações por operadores compactos.

3. *Teorema de Atkinson*: Se $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ são operadores Noetherianos então o produto $AB \in \mathcal{L}(X, Z)$ é também um operador Noetheriano e $\operatorname{ind}(AB) = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B$.

4. *Alternativa de Fredholm*: Para uma equação $Ax = y$, onde A é um operador de Fredholm, verifica-se uma das seguintes alternativas

- (a) A equação homogénea $Ax = 0$ não tem soluções linearmente independentes ($\alpha(A) = 0$) e, então, a equação $Ax = y$ resolve-se incondicionalmente e tem solução única.

¹Na literatura ocidental, em geral, é usado o termo “operador de Fredholm” para designar aqueles operadores que na literatura Russa (e ao longo deste trabalho) são chamados operadores de Noether, ficando o termo “operador de Fredholm” reservado para um operador de Noether com índice zero, de acordo com a Definição 1.11.

- (b) A equação homogénea $Ax = 0$ tem soluções não triviais e, então, para a resolubilidade da equação $Ax = y$ é necessário e suficiente que se verifiquem $\alpha(A)$ condições de resolubilidade.

Passamos agora a apresentar os resultados que expõem a teoria de Noether do operador integral singular com núcleo de Cauchy K (definido pela equação (1.8)).

Teorema 1.12 *O operador K é Noetheriano se e só se*

$$\det(A(t) \pm B(t)) \neq 0 \quad , \quad t \in \Gamma.$$

Teorema 1.13 *O índice do operador de Noether K calcula-se pela fórmula*

$$\text{ind}K = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\det(A(t) - B(t))}{\det(A(t) + B(t))} \right\}_{\Gamma} = \text{Ind}_{\Gamma} \frac{\det(A(t) - B(t))}{\det(A(t) + B(t))}.$$

Em geral, é mais simples considerar o operador integral singular K sem o operador compacto D . Este operador,

$$(K^0\varphi)(t) \equiv A(t)\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (1.9)$$

chama-se *operador integral singular característico*. De acordo com o Teorema de Atkinson, os Teoremas 1.12 e 1.13 mantêm-se válidos para o operador K^0 .

Se considerarmos as projecções $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$ introduzidos em (1.2), a fórmula (1.9) pode escrever-se na forma

$$K^0 \equiv T_{C,D} \equiv CP_+ + DP_-$$

onde $C = A + B$ e $D = A - B$.

Considerando esta representação para o operador integral singular característico e considerando o caso particular $n = 1$, os Teoremas 1.12 e 1.13 têm a seguinte formulação alternativa.

Teorema 1.14 *Um operador integral singular característico com o núcleo de Cauchy*

$$T_{c,d} = cP_+ + dP_- : H_{\mu}(\Gamma) \rightarrow H_{\mu}(\Gamma) \quad (L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma))$$

$c, d \in H_{\mu}(\Gamma) (C(\Gamma))$, com Γ uma curva fechada de Lyapunov, é Noetheriano se e só se $\min_{t \in \Gamma} |c(t)d(t)| > 0$. ($c(t)d(t) \neq 0$ sobre Γ).

Teorema 1.15 *Se um operador integral singular*

$$T_{c,d} = cP_+ + dP_- : H_{\mu}(\Gamma) \rightarrow H_{\mu}(\Gamma) \quad (L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma)) \quad \text{com } c, d \in H_{\mu}(\Gamma) (C(\Gamma))$$

é Noetheriano, então $\text{ind}T_{c,d} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{d(t)}{c(t)} \right\}_{\Gamma} = \text{Ind}_{\Gamma} \frac{d(t)}{c(t)}$.

1.2.2 Teoria de resolubilidade

A teoria de resolubilidade de um operador A consiste no cálculo dos números de defeito $\alpha(A)$ e $\beta(A)$, na formulação das condições de resolubilidade e na obtenção das soluções explícitas ou aproximadas das equações correspondentes.

Relativamente à teoria de resolubilidade da equação integral singular (1.8) e do operador integral singular característico (1.9), começamos por enunciar o seguinte resultado relativo às condições de resolubilidade.

Teorema 1.16 *A equação $K\varphi = f$ é solúvel se e só se*

$$\int_{\Gamma} f(t) \psi_j(t) dt = 0,$$

onde $\{\psi_j\}$, $j = 1, 2, \dots, \alpha(K')$, é um sistema completo de soluções linearmente independentes da equação homogênea aliada $K'\psi = 0$.

Onde K' é o operador aliado do operador K , e é definido por

$$(K'\psi)(t) \equiv A(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{\Gamma} k(\tau, t)\psi(\tau) d\tau$$

e satisfaz a igualdade

$$\int_{\Gamma} (K\varphi)(t)\psi(t) dt = \int_{\Gamma} \varphi(t)(K'\psi)(t) dt.$$

Verifica-se que $\dim \text{coker} K = \dim \ker K'$, i.e. $\beta(K) = \alpha(K')$.

Consideremos agora a teoria de resolubilidade da equação integral singular característica

$$(K^0\varphi)(t) \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) \quad , \quad t \in \Gamma. \quad (1.10)$$

Uma vez que as fórmulas de Sokhotsky-Plemeli (ver Teorema 1.2) nos permitem reduzir esta equação a um problema de limite de Riemann, começamos por apresentar a solução e as condições de resolubilidade deste.

Seja Γ uma curva simples, suave, fechada que divide o plano complexo estendido nas partes interior D^+ ($\ni 0$) e exterior D^- ($\ni \infty$). Dadas as funções G e g definidas em Γ , o problema de limite de Riemann consiste em encontrar funções $\Phi^+(z)$ e $\Phi^-(z)$ analíticas em D^+ e D^- , respectivamente, cujos valores limite no contorno Γ satisfazem a condição

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t). \quad (1.11)$$

Procuramos a solução do problema de limite (1.11) na classe das funções representadas por integrais do tipo de Cauchy, satisfazendo por isso a condição adicional $\Phi^-(\infty) = 0$. Consideremos o caso $G, g \in H_{\mu}(\Gamma)$ com $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Fazendo $\kappa = \frac{1}{2\pi} \{\arg G(t)\}_{\Gamma}$ e introduzindo as, assim chamadas, *funções canônicas* do problema de Riemann(1.11)

$$\chi^+(z) = e^{\Upsilon^+(z)} \quad , \quad \chi^-(z) = z^{-\kappa} e^{\Upsilon^-(z)} \quad ,$$

onde

$$\Upsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln(\tau^{-\kappa} G(\tau))}{\tau - z} d\tau,$$

$\Upsilon^+(z) = \Upsilon(z)$ se $z \in D^+$, $\Upsilon^-(z) = \Upsilon(z)$ se $z \in D^-$, obtemos que o coeficiente $G(t)$ admite a factorização

$$G(t) = \chi^+(t) [\chi^-(t)]^{-1}, \quad (1.12)$$

que se revela fundamental para a obtenção dos resultados seguintes

1. Se $\kappa \geq 0$ a solução do problema de limite de Riemann (com a condição adicional $\Phi^-(\infty) = 0$) é dada por

$$\Phi^\pm(z) = \chi^\pm(z) \Psi^\pm(z) + \chi^\pm(z) P_{\kappa-1}(z) \quad (1.13)$$

onde $P_{\kappa-1}(z) \equiv 0$ se $\kappa = 0$ e $P_{\kappa-1}(z)$ é um polinómio de grau inferior ou igual a $\kappa-1$ com coeficientes complexos arbitrários $c_0, c_1, \dots, c_{\kappa-1}$, para $\kappa > 0$. Com

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z},$$

$\Psi^+(z) = \Psi(z)$ se $z \in D^+$, $\Psi^-(z) = \Psi(z)$ se $z \in D^-$.

2. Se $\kappa < 0$, $P_{\kappa-1}(z) \equiv 0$, e obtêm-se as condições de resolubilidade do problema (1.11):

$$\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{\chi^+(t)} t^{k-1} dt = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, -\kappa. \quad (1.14)$$

Voltemos agora a considerar a equação integral singular característica, $K^0\varphi = f(t)$. Usando as fórmulas de Sokhotsky-Plemeli (1.1), a equação (1.10) reduz-se ao problema de limite de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a(t) + b(t)} \quad , t \in \Gamma \quad (1.15)$$

para uma função $\Phi(z)$ (seccionalmente analítica) tal que $\Phi^+(z)$ e $\Phi^-(z)$ são analíticas em D^+ e D^- , respectivamente, com $\Phi^-(\infty) = 0$. Decorre das fórmulas de Sokhotsky-Plemeli (1.1) que existe uma correspondência biúnivoca entre as soluções do problema de limite (1.15) e as soluções da equação (1.10). Diz-se que a equação (1.10) e o problema (1.15) com a condição adicional $\Phi^-(\infty) = 0$ são equivalentes.

Assim, podemos transferir para a equação (1.10) a teoria de resolubilidade do problema de limite de Riemann. Deste modo, fazendo $G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$ e $g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}$, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 1.17 *Sejam $a, b \in H_\mu(\Gamma)$ ($C(\Gamma)$), $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Então para o operador $K^0 : H_\mu(\Gamma) \rightarrow H_\mu(\Gamma)$ ($L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma)$) estão satisfeitas as seguintes afirmações:*

$$(i) \quad \alpha(K^0) = \dim \ker K^0 = \max(0, \kappa) \quad , \quad \beta(K^0) = \dim \operatorname{coker} K^0 = \max(0, -\kappa),$$

$$\kappa = \operatorname{ind} K^0 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{a-b}{a+b} \right\}_{\Gamma} .$$

- (ii) Se $\kappa = 0$, $\kappa > 0$ ou $\kappa < 0$ existem, e podem construir-se explicitamente, o operador inverso K^{0-1} ($\kappa = 0$), o operador inverso à direita K_r^{0-1} ($\kappa > 0$) ou o operador inverso à esquerda K_l^{0-1} ($\kappa < 0$), respectivamente.
- (iii) A solução geral e as condições de resolubilidade da equação (1.10) obtêm-se usando as fórmulas de Sokhotsky-Plemeli (mais precisamente a relação $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$), a solução (1.13) e as condições de resolubilidade (1.14) do problema de limite de Riemann correspondente (1.15).

Notamos que o teorema anterior dá-nos a teoria de resolubilidade da equação (1.10) apenas para o caso de coeficientes escalares ($n = 1$). Salientamos também que este teorema está baseado na factorização (1.12) da função (escalar) $G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$.

Analogamente, a teoria de resolubilidade deste problema no caso de coeficientes matriciais também tem por base a factorização de uma função matricial G .

Embora não apresentemos aqui a teoria de resolubilidade de um problema de limite de Riemann com coeficientes matriciais, o conceito de factorização será indispensável na secção seguinte. Assim, passamos a generalizar a ideia da factorização (1.12) ao caso de uma função matricial G .

Seja Γ uma curva simples, suave, fechada que divide o plano complexo estendido nas partes interior D^+ ($\ni 0$) e exterior D^- ($\ni \infty$) e seja $G \in H_{\mu}^{n \times n}(\Gamma)$ uma função $n \times n$ - matricial não singular. Fixemos $\kappa = \frac{1}{2\pi} \{ \arg \det G(t) \}_{\Gamma}$.

Definição 1.18 Uma factorização de uma função matricial não singular $G(t)$ relativa ao contorno Γ é uma representação de G na forma

$$G(t) = G^+(t) \Lambda(t) G^-(t) \quad (1.16)$$

onde $G^{\pm}(t)$ são os valores limite das funções matriciais $G^{\pm}(z)$, analíticas e não singulares em D^{\pm} , respectivamente e satisfazendo $\det G^{\pm}(z) \neq 0$, $\Lambda(t) = \operatorname{diag} \{t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}, \dots, t^{\kappa_n}\}$ e $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ são inteiros e chamam-se índices parciais de G . À soma destes, $\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n = \kappa = \operatorname{Ind}_{\Gamma} \det G(t)$, chamamos índice total de G .

Os índices parciais são invariantes da factorização (1.16). As funções matriciais $G^{\pm}(z)$ são chamadas *canónicas*.

Consideremos agora o seguinte teorema de [29] que relaciona duas factorizações distintas de uma função matricial $G(t)$.

Teorema 1.19 Se existem duas factorizações diferentes de uma função matricial não singular $G(t)$:

$$G(t) = G^+(t) \Lambda(t) G^-(t) = \tilde{G}^+(t) \tilde{\Lambda}(t) \tilde{G}^-(t)$$

e $H^+ = \left(\tilde{G}^+\right)^{-1} G^+$, $H^- = \tilde{G}^-(G^-)^{-1}$, então $\Lambda = \tilde{\Lambda} = \operatorname{diag} \{t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}, \dots, t^{\kappa_n}\}$ e $\Lambda H^- = H^+ \Lambda$.

No caso de uma função (2×2) – matricial $G(t)$ temos

$$H^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & P_{\kappa_1 - \kappa_2} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad H^- = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t^{\kappa_2 - \kappa_1} P_{\kappa_1 - \kappa_2} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

onde $P_{\kappa_1 - \kappa_2}$ é um polinómio de grau não superior a $\kappa_1 - \kappa_2$ e λ_1, λ_2 são constantes.

O problema de factorização de uma função matricial, ao contrário do que se passa no caso escalar, só pode ser resolvido efectivamente em casos muito particulares. É neste facto que reside a maior dificuldade da obtenção da teoria de resolubilidade de operadores integrais singulares com coeficientes matriciais e também de operadores integrais singulares com deslocamento, uma vez que, como veremos mais à frente, a teoria de resolubilidade destes se reduz ao problema de resolubilidade de operadores integrais singulares com coeficientes matriciais (neste caso com matrizes 2×2).

As provas e uma exposição mais detalhada da teoria de operadores integrais singulares com o núcleo de Cauchy e do problema de limite de Riemann podem ser encontradas em [2], [3], [29], [31], [32].

1.3 Equações integrais singulares com um deslocamento de Carleman

Esta secção será dedicada às teorias de Noether e de resolubilidade de operadores integrais singulares com um deslocamento de Carleman. A teoria de Noether será apresentada para o caso de um deslocamento de Carleman qualquer. Quanto à teoria de resolubilidade, apenas vamos considerar o caso de um deslocamento linear fraccionário (da forma (1.5)) de Carleman ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$) sobre a circunferência unitária \mathbb{T} .

1.3.1 Teoria de Noether

Seja Γ uma curva de Lyapunov e $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma$ um deslocamento de Carleman de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$) que preserva ou muda a orientação sobre Γ , tal que $\alpha' \in H_\mu(\Gamma)$ e $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. E seja W o operador de deslocamento correspondente ($W^2 = I$).

Consideremos, em $H_\mu(\Gamma)$ ($a, b, c, d \in H_\mu(\Gamma)$) ou em $L_p(\Gamma)$ ($a, b, c, d \in C(\Gamma)$), o operador

$$K = (aI + bW)P_+ + (cI + dW)P_- \quad , \quad P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S) \quad (1.17)$$

e o seu operador companheiro

$$\tilde{K} = (aI - bW)P_+ + (cI - dW)P_- .$$

Estes operadores satisfazem as seguinte identidade matricial

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ W & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \tilde{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W \\ I & -W \end{pmatrix} = AP_+ + BP_- + D \equiv M, \quad (1.18)$$

onde

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} c(t) & d(t) \\ d(\alpha(t)) & c(\alpha(t)) \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

se $\alpha(t) = \alpha_+(t)$ preserva a orientação sobre Γ , e

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) \\ b(\alpha(t)) & c(\alpha(t)) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} c(t) & b(t) \\ d(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

se $\alpha(t) = \alpha_-(t)$ muda a orientação sobre Γ .

O operador $D = \{d(WSW - \gamma S), c(\alpha)(WSW - \gamma S)\}$, com $\gamma = \pm 1$ se $\alpha = \alpha_{\pm}$, é compacto de acordo com o Teorema 1.6.

Verifica-se ainda que os seguintes operadores são compactos

$$uK - \tilde{K}u, \text{ onde } u(t) = \alpha(t) - t \text{ e } \alpha = \alpha_+.$$

$$SK - \tilde{K}S, \text{ onde } S \text{ é o operador integral singular de Cauchy e } \alpha = \alpha_-.$$

Observe-se que $u(t) = \alpha_+(t) - t \neq 0$, $t \in \Gamma$ logo o operador uI é invertível.

O operador $M = AP_+ + BP_- + D$ é um operador integral singular sem deslocamento com coeficientes matriciais. Este operador é chamado o *operador correspondente* para K .

Visto que o operador D é compacto, de acordo com o Teorema de Mikhlin-Atkinson (ver Subsecção 1.2.1), a teoria de Noether do operador M , e, consequentemente, do operador K , pode ser obtida a partir da teoria de Noether do operador integral singular com coeficientes matriciais sem deslocamento, $AP_+ + BP_-$.

Assim, o teorema seguinte foi estabelecido em [24] (ver também [25], [26]) e dá-nos as condições de Noether e a fórmula do índice para o operador (1.17).

Teorema 1.20 *O operador*

$$K = (aI + bW)P_+ + (cI + dW)P_- : H_{\mu}(\Gamma) \rightarrow H_{\mu}(\Gamma) \quad (L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma)) \quad (1.21)$$

é Noetheriano se e só se

1.

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= c(t)c(\alpha(t)) - d(t)d(\alpha(t)) \neq 0, \\ \Delta_2(t) &= a(t)a(\alpha(t)) - b(t)b(\alpha(t)) \neq 0 \end{aligned}$$

se o deslocamento de Carleman preserva a orientação sobre Γ ($\alpha = \alpha_+$). E, neste caso, o índice do operador de Noether (1.21) é dado por

$$\text{ind}K = \frac{1}{4\pi} \left\{ \arg \frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)} \right\}_{\Gamma};$$

2.

$$\Delta(t) = a(t)c(\alpha(t)) - d(t)b(\alpha(t)) \neq 0 \quad (1.22)$$

se o deslocamento de Carleman muda a orientação sobre Γ ($\alpha = \alpha_-$). E, neste caso, uma fórmula para o índice do operador (1.21) é a seguinte

$$\text{ind}K = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \Delta(t) \right\}_{\Gamma}.$$

Notamos ainda que, da identidade (1.18), decorre que

$$\dim \ker K + \dim \ker \tilde{K} = \dim \ker M .$$

Se definirmos $V(t) = c(\alpha(t))b(t) - a(\alpha(t))d(t)$, com α um deslocamento de Carleman que preserva ou muda a orientação sobre Γ , obtemos a seguinte identidade

$$\Delta(t)\Delta(\alpha(t)) - V(t)V(\alpha(t)) \equiv \Delta_1(t)\Delta_2(t) .$$

Chamamos também atenção para o facto do Teorema 1.20 admitir uma generalização natural ao caso de um operador K com coeficientes matriciais ($n \times n$).

Uma exposição mais pormenorizada dos resultados apresentados acima encontra-se em [17], [31], [25], [2].

1.3.2 Teoria de resolubilidade para o caso de um deslocamento linear fraccionário de Carleman

Nesta subsecção vamos obter a teoria de resolubilidade para equações integrais singulares características com um deslocamento de Carleman. Para tal, começamos por impôr restrições ao deslocamento α . Mais precisamente, vamos considerar o caso de um deslocamento linear fraccionário de Carleman (da forma (1.5)) sobre a circunferência unitária, \mathbb{T} . Antes mais, referimos que o estudo da teoria de resolubilidade de operadores integrais singulares com um deslocamento linear fraccionário de Carleman foi iniciado por Litvinchuk e Vasilevski [30].

Caso de um deslocamento directo

Começamos pelo caso de um deslocamento que preserva a orientação sobre \mathbb{T} . Consideremos, então, a seguinte transformação linear fraccionária, definida em $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\beta} \right\}$:

$$\alpha(z) = \frac{z - \beta}{\beta z - 1} , \quad 0 < |\beta| < 1 . \quad (1.23)$$

Esta transformação não tem pontos fixos sobre \mathbb{T} , uma vez que $\alpha(t) = \frac{t-\beta}{\beta t-1}$, $|\beta| < 1$ é um deslocamento de Carleman que preserva a orientação sobre \mathbb{T} . No entanto α admite dois pontos fixos ξ_{\pm} em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, dados por $\xi_{\pm} = \frac{1 \mp \lambda}{\beta}$, com $\lambda = \sqrt{1 - |\beta|^2}$. Denotando por \mathbb{T}_+ e \mathbb{T}_- o interior e o exterior de \mathbb{T} , respectivamente, temos que $\xi_{\pm} \in \mathbb{T}_{\pm}$.

Associado ao deslocamento α vamos considerar o operador de deslocamento com peso, U , definido por $(U\varphi)(t) = -\alpha^+(t)(W\varphi)(t)$, onde $\alpha^+(t) = \frac{\lambda}{\beta t-1}$ é o factor esquerdo da factorização de $\alpha(t)$ apresentada em (1.6). Quando introduzimos este operador, na Secção 1.1, vimos também que este satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $U^2 = I$,
- (ii) $US = SU$,
- (iii) $P_{\mp}UP_{\pm} = 0$.

Um operador com a forma

$$A = aI + bU, \quad (1.24)$$

onde a e b são funções definidas em \mathbb{T} , chama-se *operador funcional* e as funções a e b são denominadas *coeficientes* deste operador.

O objectivo desta subsecção é o estudo da teoria de resolubilidade de operadores integrais singulares da forma

$$T(A, B) = AP_+ + BP_-,$$

onde A e B são operadores funcionais. Para esse fim usaremos o método proposto em [18] e desenvolvido em [16] onde podem ser encontrados todos os detalhes do material que passamos a expor.

Sem perda de generalidade, consideraremos operadores com a forma mais simples

$$T(A) = P_+ + AP_-.$$

Veremos que este operador pode ser factorizado usando uma factorização do operador funcional A e do operador matricial, M , correspondente para $T(A)$ (ver Subsecção 1.3.1). Note-se que a propriedade (ii) do operador U permite-nos obter o operador M , em (1.18), sem o operador compacto D , sendo, por isso, um operador integral singular característico sem deslocamento e com coeficientes matriciais.

Assim, a factorização de um operador $T = P_+ + AP_-$, com $A = aI + bU$ um operador funcional, será realizada em dois passos. Primeiramente resolvemos o problema de factorização para o operador funcional A , que, a menos de um isomorfismo algébrico, é equivalente a um problema de factorização numa algebra adequada de funções matriciais. Em seguida, basemo-nos no resultado mencionado para obter a factorização do operador T .

Começamos por introduzir alguma notação e recordar alguns resultados básicos. Seja \mathfrak{B} uma álgebra decomponível de funções contínuas na circunferência unitária, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_+ \oplus \overset{\circ}{\mathfrak{B}}_-$, com $\mathfrak{B}_+ = P_+\mathfrak{B}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{B}}_- = P_-\mathfrak{B}$ e designemos $\mathfrak{B}_- = \overset{\circ}{\mathfrak{B}}_- \oplus \mathbb{C}$. Por \mathbf{A} , \mathbf{A}_\pm e $\overset{\circ}{\mathbf{A}}_-$ denotamos as álgebras de todos os operadores funcionais com coeficientes, respectivamente, em \mathfrak{B} , \mathfrak{B}_\pm e $\overset{\circ}{\mathfrak{B}}_-$. Da propriedade (iii) do operador U apresentada acima, decorre que

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_+ \oplus \overset{\circ}{\mathbf{A}}_-, \quad P_\mp \mathbf{A}_\pm P_\pm = \{0\},$$

tendo-se assim que a álgebra de operadores \mathbf{A} é decomponível e o problema de factorização de elementos de \mathbf{A} tem sentido.

Definição 1.21 *Seja α o deslocamento de Carleman (1.23) definido sobre a circunferência unitária. No seguimento, usamos o símbolo $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ para representar a álgebra de todas as 2×2 matrizes funcionais da forma*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b(\alpha) & a(\alpha) \end{pmatrix}$$

com $a, b \in \mathfrak{B}$.

Usaremos também a seguinte caracterização dos elementos de $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$: $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ se e só se $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}^{2 \times 2}$ e

$$\mathcal{A} = e\mathcal{A}(\alpha)e, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Verifica-se que a subálgebra $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ de $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$ é também uma álgebra decomponível

$$\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2} = \mathfrak{B}_{+, \alpha}^{2 \times 2} \oplus \mathring{\mathfrak{B}}_{-, \alpha}^{2 \times 2}$$

onde $\mathfrak{B}_{+, \alpha}^{2 \times 2} = P_+ \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ e $\mathring{\mathfrak{B}}_{-, \alpha}^{2 \times 2} = P_- \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$. Pomos $\mathfrak{B}_{-, \alpha}^{2 \times 2} = \mathring{\mathfrak{B}}_{-, \alpha}^{2 \times 2} \oplus \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Introduzimos agora o seguinte isomorfismo algébrico da álgebra \mathbf{A} na álgebra $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ (ver, por exemplo, [20]):

$$\pi : A = aI + bU \mapsto \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b(\alpha) & a(\alpha) \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

É importante notar que neste caso, em que α é um deslocamento linear fraccionário de Carleman, o isomorfismo π satisfaz as seguintes propriedades de invariância

$$\pi(\mathbf{A}_\pm) = \mathfrak{B}_{\pm, \alpha}^{2 \times 2}.$$

Esta propriedade significa que para factorizar o operador A na álgebra \mathbf{A} é suficiente factorizar a função matricial $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ na álgebra $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$.

Prosseguimos agora com a definição do conceito de factorização na álgebra $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ que será conveniente para os nossos propósitos.

Uma factorização de uma função matricial $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}^{2 \times 2}$ na álgebra $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$ é uma representação de \mathcal{A} na forma

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \Lambda \mathcal{A}_-,$$

onde $\mathcal{A}_+^{\pm 1} \in \mathfrak{B}_+^{2 \times 2}$, $\mathcal{A}_-^{\pm 1} \in \mathfrak{B}_-^{2 \times 2}$, e

$$\Lambda(t) = \text{diag} \{t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}\},$$

onde κ_1 e κ_2 são inteiros, que supomos satisfazerem $\kappa_1 \geq \kappa_2$ e são chamados índices parciais de \mathcal{A} (são unívocamente determinados por \mathcal{A}).

O número $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ chama-se índice total de \mathcal{A} e coincide com $\text{Ind}_\mathbb{T} \det \mathcal{A}$.

Se $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ a factorização de \mathcal{A} diz-se canónica.

Notamos ainda que, se pelo menos um dos índices parciais for não nulo, então o factor central de uma factorização de \mathcal{A} não pertence a $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$, i.e. $\Lambda \notin \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$.

Considerando o caso em que $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ admite uma factorização canónica, temos que \mathcal{A} representa-se univocamente na forma

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \mathcal{A}_-, \quad \text{com } \mathcal{A}_+(\xi_+) = e_0,$$

onde ξ_+ é o ponto fixo do deslocamento α que satisfaz $\xi_+ \in \mathbb{T}_+$ e $e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Visto que $\mathcal{A} = e\mathcal{A}(\alpha)e$ e

$$\mathcal{A} = e\mathcal{A}_+(\alpha)ee\mathcal{A}_-(\alpha)e, \quad \text{com } e\mathcal{A}_+(\alpha(\xi_+))e = e_0,$$

obtemos que $\mathcal{A}_+ = e\mathcal{A}_+(\alpha)e$ e $\mathcal{A}_- = e\mathcal{A}_-(\alpha)e$, ou seja, $\mathcal{A}_+ \in \mathfrak{B}_{+, \alpha}^{2 \times 2}$ e $\mathcal{A}_- \in \mathfrak{B}_{-, \alpha}^{2 \times 2}$.

Passamos agora ao caso geral de uma factorização não canónica de \mathcal{A} .

Lema 1.22 Se $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ admite uma factorização em $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$, seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \Lambda \mathcal{A}_-$, então os factores exteriores satisfazem as seguintes identidades

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_+ &= e \mathcal{A}_+(\alpha) \Lambda_+ \mathcal{H}_{\varepsilon,p} \\ \mathcal{A}_- &= \Lambda^{-1} \mathcal{H}_{\varepsilon,p} \Lambda \Lambda_- \mathcal{A}_-(\alpha) e\end{aligned}$$

onde e é a matriz constante dada em (1.25), $\Lambda_\pm = \text{diag}\{(\alpha^\pm)^{\kappa_1}, (\alpha^\pm)^{\kappa_2}\}$ e $\mathcal{H}_{\varepsilon,p} = \begin{pmatrix} \varepsilon & p \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$ é uma função matricial triângular onde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ e p é um polinómio de grau não superior a $\kappa_1 - \kappa_2$ que é um número par, tal que

$$p(\alpha) = (\alpha^+)^{\kappa_1 - \kappa_2} p. \quad (1.27)$$

Prova. Se $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ então $\mathcal{A} = e \mathcal{A}(\alpha) e$ vindo que

$$\mathcal{A} = (e \mathcal{A}_+(\alpha) \Lambda_+) \Lambda (\Lambda_- \mathcal{A}_-(\alpha) e)$$

é outra factorização de \mathcal{A} .

De acordo com o Teorema 1.19, sobre a relação entre duas factorizações da mesma função matricial não singular, obtemos

$$\mathcal{A}_+ = e \mathcal{A}_+(\alpha) \Lambda_+ \mathcal{H}, \quad (1.28)$$

$$\mathcal{A}_- = \Lambda^{-1} \mathcal{H}^{-1} \Lambda \Lambda_- \mathcal{A}_-(\alpha) e. \quad (1.29)$$

onde $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mu & p \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$, com $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ e p um polinómio de grau não superior a $\kappa_1 - \kappa_2$.

Considerando os pontos fixos, $\xi_\pm \in \mathbb{T}_\pm$, do deslocamento (1.23) satisfazem-se as igualdades $\alpha^+(\xi_+) = -1$ e $\alpha^-(\xi_-) = 1$. Consequentemente $\det \Lambda_+(\xi_+) = (-1)^{\kappa_1 + \kappa_2}$ e $\det \Lambda_-(\xi_-) = 1$. Assim, calculando os determinantes de ambos os membros de (1.28) e (1.29) nos pontos fixos ξ_+ e ξ_- , respectivamente, obtemos

$$\mu \nu (-1)^{\kappa_1 + \kappa_2} = -1 \quad \text{e} \quad \mu \nu = -1.$$

Consequentemente $\kappa_1 + \kappa_2$, e também $\kappa_1 - \kappa_2$, são necessariamente números pares.

Por outro lado, de (1.28) decorre que $\mathcal{A}_+(\alpha) = e \mathcal{A}_+ \Lambda_+(\alpha) \mathcal{H}(\alpha)$. Substituindo esta relação em (1.28), vem que

$$e_0 = \Lambda_+(\alpha) \mathcal{H}(\alpha) \Lambda_+ \mathcal{H}. \quad (1.30)$$

Da igualdade matricial (1.30) obtemos que $\mu^2 = \nu^2 = 1$, resultando que

$$\mu = -\nu = \varepsilon, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

De (1.30) concluímos também que p tem que satisfazer a igualdade (1.27). Finalmente, pondo $\mathcal{H}_{\varepsilon,p} = \mathcal{H}$, temos também $\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}_{\varepsilon,p}$. ■

É importante salientar que é possível mostrar que o número ε que aparece nesta proposição é determinado unívocamente pela função matricial $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$, não dependendo, assim, da factorização considerada.

Introduzimos agora o conceito de factorização na álgebra $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$.

Definição 1.23 *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ não singular. Chamamos factorização de \mathcal{A} na álgebra $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ a uma sua representação na forma*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{+, \alpha} \mathcal{R} \mathcal{A}_{-, \alpha},$$

onde

- (i) $\mathcal{A}_{+, \alpha}^{\pm 1} \in \mathfrak{B}_{+, \alpha}^{2 \times 2}$, $\mathcal{A}_{-, \alpha}^{\pm 1} \in \mathfrak{B}_{-, \alpha}^{2 \times 2}$,
- (ii) $\mathcal{R} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ tem a forma

$$\mathcal{R} = \mathcal{K} \mathcal{S}^{-1} \text{diag} \{ \chi^{\kappa_1}, \chi^{\kappa_2} \} \mathcal{S},$$

onde κ_1, κ_2 são inteiros tais que $\kappa_1 \geq \kappa_2$, $\mathcal{K} = \text{diag} \{ 1, (-1)^{\kappa_1} \}$, \mathcal{S} é uma matriz constante não singular, e $\chi \in \mathfrak{B}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$\chi(\alpha) = -\chi \quad e \quad \text{Ind}_{\top} \chi = 1. \quad (1.31)$$

É conveniente fazer algumas observações relativamente a esta definição.

Procuraremos agora explicar quais as principais utilidades das condições impostas ao factor central \mathcal{R} , e em particular à função χ , na definição anterior. Começamos por notar que a segunda condição em (1.31) permite garantir que a partir de uma factorização de \mathcal{A} em $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ se possa obter uma factorização de \mathcal{A} em $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$ (facto este que deve ser naturalmente exigido, visto que $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$). Com efeito, se $\text{Ind}_{\top} \chi = 1$ então χ pode factorizar-se em \mathfrak{B} como $\chi = \chi_+ t \chi_-$, consequentemente obtemos uma factorização de \mathcal{R} em $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$ da seguinte forma

$$\mathcal{R} = (\mathcal{K} \mathcal{S}^{-1} \text{diag} \{ \chi_+^{\kappa_1}, \chi_-^{\kappa_2} \}) \text{diag} \{ t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2} \} (\text{diag} \{ \chi_-^{\kappa_1}, \chi_+^{\kappa_2} \} \mathcal{S}).$$

A substituição desta factorização na factorização $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{+, \alpha} \mathcal{R} \mathcal{A}_{-, \alpha}$ dá-nos a factorização pretendida de \mathcal{A} em $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$. Este procedimento mostra que os números κ_1 e κ_2 são precisamente os índices parciais de $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$, que, de acordo com o lema anterior são ambos pares ou ambos ímpares.

Consideremos agora o papel da outra condição imposta à função χ , nomeadamente, $\chi(\alpha) = -\chi$. Antes de mais, notamos que esta condição é compatível com a anterior, uma vez que qualquer função anti-invariante relativamente a α tem índice ímpar (ver, por exemplo, [8], Cap. 3, pág. 119). Além disso, considerando o caso em que κ_1 e κ_2 são números pares, vindo $\mathcal{K} = e_0$, esta referida condição implica que $\mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}$. Assim, para que $\mathcal{R} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$, tem que se verificar $e \mathcal{R} e = \mathcal{R}$. Este facto permite-nos determinar explicitamente a matriz constante \mathcal{S} que assegura que esta propriedade é satisfeita: \mathcal{S} é uma matriz diagonalizante para e . Analogamente, no caso em que κ_1 e κ_2 são números ímpares, tendo-se $\mathcal{K} = \text{diag} \{ 1, -1 \}$, a referida condição implica que $\mathcal{R}(\alpha) = -\mathcal{R}$. Visto que \mathcal{K} anti-comuta com e , para que $\mathcal{R} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ mantém-se a mesma conclusão para \mathcal{S} . De entre as matrizes diagonalizantes para e , podemos escolher aquelas que são unitárias, tomando

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{com } \omega = \pm 1.$$

No seguimento escrevemos \mathcal{S}_ω em vez de \mathcal{S} quando estivermos a considerar esta escolha.

Apresentamos agora dois exemplos de possíveis escolhas para a função χ . Podemos tomar para χ a função definida por $\chi(t) = \alpha(t) - t$, $t \in \mathbb{T}$, que pode ser factorizar-se como $\chi = \chi_+ t \chi_-$, com $\chi_+ = \beta \frac{t-\xi_-}{\beta t-1}$ e $\chi_- = 1 - \frac{\xi_+}{t}$. Neste caso a função matricial \mathcal{R} é racional. Outro possível exemplo decorre da escolha de um ramo conveniente da função $\sqrt{t\alpha(t)}$, nomeadamente $\chi(t) = \sqrt{\alpha^+ t} \sqrt{\alpha^-}$, onde $\sqrt{\alpha^\pm}$ são ramos que preservam a analiticidade em \mathbb{T}_\pm . Neste contexto, esta escolha pode ser feita se pudermos garantir que $\sqrt{\alpha^\pm} \in \mathfrak{B}$.

Estamos agora em condições de enunciar o principal resultado sobre a factorização em $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$.

Teorema 1.24 *Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) \mathcal{A} admite uma factorização em $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$,
- (ii) \mathcal{A} admite uma factorização em $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$.

Mais, a partir de qualquer uma das factorizações de \mathcal{A} referidas acima pode obter-se explicitamente a outra.

Embora não apresentemos aqui a prova deste teorema (que pode ser encontrada em [16]), é importante notar que a implicação (i) \Rightarrow (ii) decorre das observações feitas imediatamente após a Definição 1.23. Deve salientar-se ainda que a prova deste teorema dá-nos um procedimento construtivo para obter uma factorização de uma função matricial $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ na álgebra $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ a partir de uma sua factorização em $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$. Mais concretamente, se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \Lambda \mathcal{A}_-$ é uma factorização de \mathcal{A} em $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$, com índices parciais κ_1 e κ_2 , os seus factores exteriores satisfazem as condições estabelecidas no Lema 1.22 (fixando-se assim o número $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ e o polinómio p). Então uma factorização de \mathcal{A} em $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ é dada por

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{+, \alpha} \mathcal{R} \mathcal{A}_{-, \alpha},$$

onde $\mathcal{R} \in \mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ é dado por

$$\mathcal{R} = \mathcal{K} \mathcal{S}_\omega^{-1} \text{diag} \{ \chi^{\kappa_1}, \chi^{\kappa_2} \} \mathcal{S}_\omega, \quad \text{com } \omega = \varepsilon$$

onde $\chi \in \mathfrak{B}$ é uma qualquer função que satisfaz as condições (1.31).

Um cálculo simples mostra que \mathcal{R} pode escrever-se como

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} u & \varepsilon v \\ (-1)^{\kappa_1} \varepsilon v & (-1)^{\kappa_1} u \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} u & \varepsilon v \\ \varepsilon v & u \end{pmatrix} & \text{se } \kappa_1 \text{ e } \kappa_2 \text{ são pares,} \\ \begin{pmatrix} u & \varepsilon v \\ -\varepsilon v & -u \end{pmatrix} & \text{se } \kappa_1 \text{ e } \kappa_2 \text{ são ímpares,} \end{cases} \quad (1.32)$$

com

$$u = \frac{1}{2} (\chi^{\kappa_1} + \chi^{\kappa_2}), \quad v = \frac{1}{2} (\chi^{\kappa_1} - \chi^{\kappa_2}). \quad (1.33)$$

Os factores exteriores $\mathcal{A}_{\pm, \alpha}$ da factorização de \mathcal{A} em $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ podem obter-se considerando uma factorização conveniente de \mathcal{R} em $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$. Mais precisamente, se a referida factorização de \mathcal{R} em $\mathfrak{B}^{2 \times 2}$ for $\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \Lambda \mathcal{R}_-$, então os factores $\mathcal{A}_{\pm, \alpha}$ são dados por

$\mathcal{A}_{+,\alpha} = \mathcal{A}_+ \mathcal{R}_+^{-1}$ e $\mathcal{A}_{-,\alpha} = \mathcal{R}_-^{-1} \mathcal{A}_-$, respectivamente, tendo-se que estes satisfazem $\mathcal{A}_{\pm,\alpha}^{\pm 1} = e \mathcal{A}_{\pm,\alpha}^{\pm 1}(\alpha) e$.

Aplicamos agora os resultados anteriores para obter uma factorização de operadores integrais singulares da forma

$$T(A) = P_+ + AP_- \quad , \quad \text{com coeficientes na álgebra } \mathbf{A}.$$

O primeiro resultado que podemos obter é que o operador $T(A)$ pode ser factorizado sempre que a função matricial $\pi(A)$ admita uma factorização na álgebra $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ (onde π é o isomorfismo definido em (1.26)).

Com efeito, se $A \in \mathbf{A}$ é um operador funcional da forma (1.24) e $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{+,\alpha} \mathcal{R} \mathcal{A}_{-,\alpha}$ é uma factorização de $\mathcal{A} = \pi(A)$ em $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$ então o operador A admite a factorização $A = A_+ R A_-$, onde $R = \pi^{-1}(\mathcal{R})$ e $A_\pm = \pi^{-1}(\mathcal{A}_{\pm,\alpha})$. Observamos que A_\pm são operadores funcionais invertíveis, cujos inversos são dados por $A_\pm^{-1} = \pi^{-1}(\mathcal{A}_{\pm,\alpha}^{-1})$, tendo-se que $P_\mp A_\pm P_\pm = 0$ e $P_\mp A_\pm^{-1} P_\pm = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} T(A) &= P_+ + AP_- = A_+ (P_+ + RP_-) (A_+^{-1} P_+ + A_- P_-) \\ &= A_+ T(R) (A_+^{-1} P_+ + A_- P_-). \end{aligned}$$

Podemos então enunciar o seguinte

Teorema 1.25 *Seja A um operador funcional da forma (1.24) com coeficientes numa álgebra decomponível \mathfrak{B} , i.e. $A \in \mathbf{A}$. Se $\mathcal{A} = \pi(A)$ admite uma factorização $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{+,\alpha} \mathcal{R} \mathcal{A}_{-,\alpha}$ na álgebra $\mathfrak{B}_\alpha^{2 \times 2}$, onde \mathcal{R} é a função matricial (1.32), então o operador $T(A)$ admite a factorização*

$$T(A) = A_+ T(R) (A_+^{-1} P_+ + A_- P_-), \quad (1.34)$$

onde $A_\pm = \pi^{-1}(\mathcal{A}_{\pm,\alpha})$ e $R = \pi^{-1}(\mathcal{R})$.

Relativamente à invertibilidade do operador $T(A)$ verifica-se o teorema seguinte, onde \mathcal{R} é a função matricial dada por (1.32) e $R = \pi^{-1}(\mathcal{R})$.

Teorema 1.26 *Seja $A \in \mathbf{A}$ nas condições do teorema anterior e sejam κ_1 e κ_2 os índices parciais de \mathcal{A} . Se $\kappa_1 \leq 0$ (respectivamente $\kappa_2 \geq 0$) então $T(A)$ é invertível à esquerda (respectivamente à direita). Se $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ então o operador $T(A)$ é invertível. Em qualquer destes casos, o inverso unilateral ou bilateral de $T(A)$ é dado por*

$$T^{-1}(A) = (A_+ P_+ + A_-^{-1} P_-) R T(R^{-1}) R^{-1} A_+^{-1}.$$

Passamos agora à caracterização do núcleo do operador $T(A)$.

Começamos por notar que os factores exteriores A_+ e $\mathcal{D} = A_+^{-1} P_+ + A_- P_-$ em (1.34) são operadores invertíveis com inversos dados por A_+^{-1} e $\mathcal{D}^{-1} = A_+ P_+ + A_-^{-1} P_-$, respectivamente. Assim, $\dim \ker T(A) = \dim \ker T(R)$.

Prosseguimos então com o estudo do núcleo do operador $T(R)$. Com esse objectivo, introduzimos os operadores de projecção complementares

$$Q^\pm = \frac{1}{2} (I \pm U). \quad (1.35)$$

Passando a denotar o menor índice parcial por $\kappa_2 = \kappa_{-1}$ e usando (1.32) e (1.33) temos que

$$R = \pi^{-1}(\mathcal{R}) = uI + \varepsilon vU = (u + \varepsilon v)Q^+ + (u - \varepsilon v)Q^- = \chi^{\kappa_\varepsilon}Q^+ + \chi^{\kappa_{-\varepsilon}}Q^-.$$

Definindo, para $\varepsilon = \pm 1$, $V_\varepsilon = P_+ + \chi^{\kappa_\varepsilon}P_-$, e uma vez que cada uma das projecções P_\pm comuta com cada uma das projecções Q^\pm , obtemos

$$T(R) = P_+ + RP_- = V_\varepsilon Q^+ + V_{-\varepsilon}Q^-. \quad (1.36)$$

Além disso, por (1.31), satisfazem-se as relações:

$$\begin{aligned} Q^\pm \chi^{\kappa_\varepsilon} &= \chi^{\kappa_\varepsilon} Q^\pm, & \text{se } \kappa_{\pm 1} \text{ são pares,} \\ Q^\pm \chi^{\kappa_\varepsilon} &= \chi^{\kappa_\varepsilon} Q^\mp, & \text{se } \kappa_{\pm 1} \text{ são ímpares,} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Das relações (1.37) decorre que, se $\kappa_{\pm 1}$ são números ímpares, em vez de (1.36), podemos escrever

$$T(R) = Q^- V_\varepsilon + Q^+ V_{-\varepsilon}. \quad (1.38)$$

Para distinguir os casos em que V_ε comuta ou não com as projecções Q^\pm , introduzimos o parâmetro $\gamma \in \{-1, 1\}$, definido por:

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{se } \kappa_1 \text{ e } \kappa_2 \text{ são pares} \\ -1 & \text{se } \kappa_1 \text{ e } \kappa_2 \text{ são ímpares.} \end{cases}$$

No caso $\gamma = -1$, juntamente com (1.36) e (1.38), temos também

$$T(R) = V_\varepsilon L^- + V_{-\varepsilon} L^+, \quad (1.39)$$

onde L^\pm são os operadores de projecção complementares definidos por

$$L^\pm = P_+ Q^\pm + P_- Q^\mp = Q^\pm P_+ + Q^\mp P_-. \quad (1.40)$$

Daqui em diante passaremos a utilizar a notação

$$T_n = P_+ + \chi^n P_-, \quad n \in \mathbb{Z},$$

segundo a qual temos $T_{\kappa_1} = V_1$ e $T_{\kappa_2} = V_{-1}$.

De (1.36), (1.38) e (1.39) e usando a convenção de notação acima obtemos a proposição seguinte.

Proposição 1.27 *Seja $A \in \mathbf{A}$, e suponhamos que se satisfazem as condições do Teorema 1.25. Sejam κ_1 e κ_2 os índices parciais de \mathcal{A} e $\varepsilon = \pm 1$ o número que resulta do Lema 1.22. Então*

$$\begin{aligned} \ker T(A) &= \ker T(R) = \\ &= \begin{cases} [\ker T_{\kappa_1} \cap \ker Q^-] \oplus [\ker T_{\kappa_2} \cap \ker Q^+] & \text{se } \varepsilon = 1 \text{ e } \gamma = 1 \\ [\ker T_{\kappa_1} \cap \ker L^+] \oplus [\ker T_{\kappa_2} \cap \ker L^-] & \text{se } \varepsilon = 1 \text{ e } \gamma = -1 \\ [\ker T_{\kappa_1} \cap \ker Q^+] \oplus [\ker T_{\kappa_2} \cap \ker Q^-] & \text{se } \varepsilon = -1 \text{ e } \gamma = 1 \\ [\ker T_{\kappa_1} \cap \ker L^-] \oplus [\ker T_{\kappa_2} \cap \ker L^+] & \text{se } \varepsilon = -1 \text{ e } \gamma = -1 \end{cases}, \end{aligned}$$

onde Q^\pm e L^\pm são as projecções definidas em (1.35) e (1.40), respectivamente.

Em seguida procuramos identificar os subconjuntos apresentados na proposição anterior. Começamos por observar que o operador integral singular (sem deslocamento) T_n tem núcleo não trivial apenas no caso $n > 0$ tendo-se nesse caso que $\dim \ker T_n = n$. Introduzimos mais um par de operadores de projecção mutuamente complementares

$$Q^{\pm, n} = \frac{1}{2} \left(I \pm (\alpha^+)^{-n} U \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, seja P^{n-1} o espaço de todos os polinómios sobre \mathbb{T} de grau menor que n . Denotando por $Q_r^{\pm, n}$ a restrição do operador $Q^{\pm, n}$ ao espaço P^{n-1} verifica-se que $Q_r^{\pm, n} : P^{n-1} \rightarrow P^{n-1}$.

Proposição 1.28 Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\dim (\ker T_n \cap \ker Q^{\pm}) = \dim \ker Q_r^{\pm, n} \quad \text{se } n \text{ é par,}$$

e

$$\dim (\ker T_n \cap \ker L^{\pm}) = \dim \ker Q_r^{\mp, n} \quad \text{se } n \text{ é ímpar.}$$

Temos ainda que os elementos $\varphi \in \ker T_n \cap \ker Q^{\pm}$ são da forma

$$\varphi = p_{n-1} \nu_n, \quad \text{com } \nu_n = \chi_+^n - t^{-n} \chi_-^{-n} = \chi_+^n (1 - \chi_-^{-n}), \quad (1.41)$$

onde $\chi = \chi_+ t \chi_-$ é uma factorização de χ e p_{n-1} é um polinómio de grau menor que n tal que $p_{n-1} \in \ker Q_r^{\pm, n}$. Por outro lado, $\varphi \in \ker T_n \cap \ker L^{\pm}$ se e só se φ é da forma (1.41) com $p_{n-1} \in \ker Q_r^{\mp, n}$.

O lema seguinte fornece-nos a caracterização dos operadores de projecção de dimensão finita $Q_r^{\pm, n}$.

Lema 1.29 Nas condições acima, $\dim \ker Q_r^{+, n} = \left[\frac{n+1}{2} \right]$, $Q_r^{-, n} = \left[\frac{n}{2} \right]$, onde $[x]$ representa a parte inteira de x , e as funções

$$q_m^{\pm} = \frac{1}{2} t^{n-1} (\alpha_-^{m-1} \pm \alpha_-^{n-m}), \quad m = 1, \dots, \dim \ker Q_r^{\pm, n}, \quad (1.42)$$

formam uma base para $\ker Q_r^{\pm, n}$.

Observamos que para a prova deste lema é conveniente considerar para P^{n-1} a base $t^{n-1} \alpha_-^{m-1}$, $m = 1, \dots, n$.

Enunciamos agora o principal resultado sobre o subespaço $\ker T(A)$.

Teorema 1.30 Nas condições da Proposição 1.27 temos que

$$\dim \ker T(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } \kappa_1 \leq 0 \\ \left[\frac{\kappa_1}{2} + \frac{1-\varepsilon}{4} \right] & \text{se } \kappa_1 > 0, \kappa_2 \leq 0 \\ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} & \text{se } \kappa_2 > 0 \end{cases} .$$

Mais, sejam ν_{κ_1} e ν_{κ_2} as funções definidas em (1.41) para $n = \kappa_1, \kappa_2$, sejam q_m^{\pm} os elementos da base de $\ker Q_r^{\pm, n}$ dada em (1.42), e seja $\mathcal{D}^{-1} = A_+ P_+ + A_-^{-1} P_-$. Então

$$\ker T(A) = \text{span} \left\{ \mathcal{D}^{-1} (q_m^+ \nu_{\kappa_1}) \right\}, \quad m = 1, \dots, \left[\frac{\kappa_1}{2} + \frac{1-\varepsilon}{4} \right]$$

se $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 \leq 0$, e

$$\begin{aligned} \ker T(A) &= \text{span} \left\{ \mathcal{D}^{-1} (q_m^+ \nu_{\kappa_1}) \cup \mathcal{D}^{-1} (q_l^- \nu_{\kappa_2}) \right\}, \\ m &= 1, \dots, \left[\frac{\kappa_1}{2} + \frac{1-\varepsilon}{4} \right] \\ l &= 1, \dots, \left[\frac{\kappa_2}{2} + \frac{1+\varepsilon}{4} \right] \end{aligned}$$

se $\kappa_2 > 0$.

Caso de um deslocamento inverso

Passamos agora ao estudo da teoria de resolubilidade de operadores integrais singulares com um deslocamento linear fraccionário de Carleman, da forma:

$$\alpha(t) = \frac{t - \beta}{\beta t - 1}, \quad |\beta| > 1,$$

que muda a orientação sobre a circunferência unitária, \mathbb{T} . Apresentamos aqui o método usado por Drekova (Kovaliova) e Kravchenko em [1] e [15].

Vamos considerar a teoria de resolubilidade do operador integral singular com um deslocamento de Carleman (1.17) onde, no lugar do operador de deslocamento W , usaremos o operador de deslocamento com peso, U , definido por $(U\varphi)(t) = \alpha^-(t) t^{-1} (W\varphi)(t)$, onde $\alpha^-(t) = \frac{it\sqrt{|\beta|^2-1}}{\beta t-1}$ é o factor direito da factorização de $\alpha(t)$ apresentada em (1.6).

Devido à igualdade $SU = -US$ (ver Secção 1.1), a identidade matricial (1.18), que relaciona o operador

$$T = (aI + bU) P_+ + (cI + dU) P_- \quad (1.43)$$

e o seu operador companheiro, $\tilde{T} = (aI - bU) P_+ + (cI - dU) P_-$, obtém-se sem o operador compacto D , vindo que $M = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-$.

Tal como no caso de um deslocamento preservando a orientação, pretendemos factorizar o operador T , no entanto usaremos um procedimento diferente que se baseará no facto de, no caso $\alpha = \alpha_-$, as matrizes \mathcal{A} e \mathcal{B} satisfazerem a relação

$$\mathcal{B} = e\mathcal{A}(\alpha) e. \quad (1.44)$$

Assim, começaremos por obter uma factorização do operador M , na qual todos os factores são operadores integrais singulares cujos coeficientes matriciais satisfazem a relação (1.44), em seguida usaremos a transformação inversa de (1.18) para obter a factorização pretendida do operador T .

Uma vez que, de acordo com a condição de Noether (1.22), a função matricial \mathcal{A} é invertível, vamos considerar a função matricial $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$. Começemos por assumir que \mathcal{C} admite a factorização (ver, por exemplo, [29])

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \Lambda \mathcal{C}^- \quad , \quad \text{com } (\mathcal{C}^+)^{\pm 1}, (\overline{\mathcal{C}^-})^{\pm 1} \in H_\infty(\mathbb{T}), \Lambda = \text{diag} \{t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}\}, \quad (1.45)$$

onde κ_1 e κ_2 , com $\kappa_1 \geq \kappa_2$, são os índices parciais de \mathcal{C} e $H_\infty(\mathbb{T})$ é a classe de Hardy (constituída pelas funções analíticas e limitadas no interior da circunferência unitária). Notamos ainda que κ_1 e κ_2 têm que ser ambos pares ou ambos ímpares pois $\text{ind}T = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$.

Da condição (1.44) decorre que $\mathcal{C} = e\mathcal{C}^{-1}(\alpha)e$. Usando esta condição, a partir da igualdade (1.45), obtemos outra factorização da matriz \mathcal{C}

$$\mathcal{C} = e [\mathcal{C}^{-}(\alpha)]^{-1} \Lambda_+^{-1} \Lambda \Lambda_-^{-1} [\mathcal{C}^{+}(\alpha)]^{-1} e \quad , \quad \Lambda_{\pm} = \Lambda(\alpha^{\pm}) \quad , \quad (1.46)$$

onde α^+ e α^- são os factores esquerdo e direito, respectivamente, da factorização (1.6).

Designado

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_+ &= \left[e [\mathcal{C}^{-}(\alpha)]^{-1} \Lambda_+^{-1} \right]^{-1} \mathcal{C}^+ = \Lambda_+ \mathcal{C}^{-}(\alpha) e \mathcal{C}^+ e \mathcal{H}_- \\ &= \Lambda_-^{-1} [\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1} e [\mathcal{C}^{-}]^{-1} \quad , \end{aligned}$$

aplicando o Teorema 1.19, da igualdade das factorizações (1.45) e (1.46) da matriz \mathcal{C} , concluimos que

$$\mathcal{H}_+ \Lambda = \Lambda \mathcal{H}_-$$

onde

$$\mathcal{H}_+ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & P(t) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{H}_- = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t^{\kappa_2 - \kappa_1} P(t) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad , \quad (1.47)$$

com λ_1 e λ_2 constantes e $P(t)$ um polinómio de grau não superior a $\kappa_1 - \kappa_2$.

Das definições de \mathcal{H}_+ e \mathcal{H}_- , temos

$$\mathcal{H}_+(\alpha) = \Lambda_+(\alpha) \mathcal{C}^{-} e \mathcal{C}^+(\alpha) \quad , \quad (1.48)$$

$$\mathcal{H}_-^{-1} = \mathcal{C}^{-} e \mathcal{C}^+(\alpha) \Lambda_- \quad . \quad (1.49)$$

Da relação $\alpha^{\pm}(\alpha(t)) = \alpha^{\mp}(t)$ (ver (1.7)) decorre que $\Lambda_- = \Lambda_+(\alpha)$. Usando esta igualdade, multiplicado a equação (1.49) à esquerda por Λ_- e à direita por Λ_-^{-1} e tendo em conta a equação (1.48), obtemos

$$\mathcal{H}_+(\alpha) = \Lambda_- \mathcal{H}_-^{-1} \Lambda_-^{-1} \quad . \quad (1.50)$$

Escrevendo explicitamente a igualdade matricial (1.50) observamos que $P(\alpha(t)) = -\lambda_1 \lambda_2 t^{\kappa_2 - \kappa_1} (\alpha^-(t))^{\kappa_1 - \kappa_2} P(t)$ e que $\lambda_1 = \lambda_1^{-1}$, $\lambda_2 = \lambda_2^{-1}$, tendo-se assim $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$. Podemos ainda obter mais informação sobre a estrutura das matrizes \mathcal{H}_+ e \mathcal{H}_- , usando o facto do deslocamento α ter dois pontos fixos, $\tau_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - |\beta|^2}}{\beta}$, sobre \mathbb{T} . Verifica-se que $\alpha^{\pm}(\tau_1) = -\tau_1$ e $\alpha^{\pm}(\tau_2) = \tau_2$. Assim, para $i = 1, 2$, $[\alpha^{\pm}(\tau_i)]^{\kappa_1 + \kappa_2} = \tau_i^{\kappa}$, pois $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$ é um número par.

Da primeira fórmula em (1.47) notamos que $\det \mathcal{H}_+ = \lambda_1 \lambda_2$. Por outro lado, avaliando os determinantes de ambos os membros da igualdade $\mathcal{H}_+ = \Lambda_+ \mathcal{C}^{-}(\alpha) e \mathcal{C}^+$ nos pontos fixos τ_1 e τ_2 , obtemos $\lambda_1 \lambda_2 = -1$. O que significa que $\lambda_1 = -\lambda_2 = \varepsilon$, com $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. A matriz \mathcal{H}_+ toma, assim, a forma

$$\mathcal{H}_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon & P(t) \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

verificando-se directamente que

$$\mathcal{H}_+^{-1} = \mathcal{H}_+ .$$

Além disso, como já foi referido,

$$P(\alpha(t)) = t^{\kappa_2 - \kappa_1} (\alpha^-(t))^{\kappa_1 - \kappa_2} P(t) .$$

Das definições de \mathcal{H}_+ e \mathcal{H}_- obtemos a fórmula

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \mathcal{H}_+ \Lambda \Lambda_-^{-1} [\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1} e \quad (1.51)$$

que será útil no seguimento.

Tendo em vista a factorização do operador integral singular T (ver (1.43)), procuramos agora obter uma factorização do operador integral singular sem deslocamento correspondente $M = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-$, na qual os factores sejam operadores integrais singulares cujos coeficientes matriciais satisfazem a relação (1.44). Usando a representação (1.51) obtemos uma factorização para M da seguinte forma

$$\begin{aligned} M &= \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_- = \mathcal{A}(P_+ + \mathcal{C}P_-) \\ &= \mathcal{A} \left(\mathcal{C}^+ (\mathcal{C}^+)^{-1} P_+ + \mathcal{C}^+ \mathcal{H}_+ \Lambda \Lambda_-^{-1} [\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1} e P_- \right) \\ &= \mathcal{A} \mathcal{C}^+ X (X^{-1} P_+ + X^{-1} \mathcal{H}_+ \Lambda \Lambda_-^{-1} e P_-) \left((\mathcal{C}^+)^{-1} P_+ + e [\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1} e P_- \right) , \end{aligned}$$

onde a matriz X é escolhida de forma que

$$e \mathcal{A}(\alpha) \mathcal{C}^+(\alpha) X(\alpha) e = \mathcal{A} \mathcal{C}^+ X \quad , \quad \det X \neq 0 \text{ sobre } \mathbb{T} . \quad (1.52)$$

Assim $M = M_0 M_1 M_2$, onde $M_{0,1,2}$ são os operadores integrais singulares matriciais

$$\begin{aligned} M_0 &= \mathcal{A} \mathcal{C}^+ X I = \mathcal{A} \mathcal{C}^+ X P_+ + \mathcal{A} \mathcal{C}^+ X P_- \\ M_1 &= X^{-1} P_+ + X^{-1} \mathcal{H}_+ \Lambda \Lambda_-^{-1} e P_- \\ M_2 &= (\mathcal{C}^+)^{-1} P_+ + e [\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1} e P_- . \end{aligned}$$

Consideremos agora cada um dos operadores $M_i, i = 0, 1, 2$. Começamos pelo operador M_2 . Por um lado M_2 é um operador continuamente invertível, com inverso dado por $M_2^{-1} = \mathcal{C}^+ P_+ + e \mathcal{C}^+(\alpha) e P_-$. Por outro lado os coeficientes matriciais de M_2 satisfazem a relação (1.44). Assim, pondo

$$(\mathcal{C}^+)^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

e aplicando ao operador M_2 a transformação inversa de (1.18) obtemos o operador matricial diagonal

$$\begin{pmatrix} T_+ & 0 \\ 0 & \tilde{T}_+ \end{pmatrix}$$

onde

$$T_+ = c_{11} P_+ + c_{21}(\alpha) U P_+ + c_{22}(\alpha) P_- + c_{12} U P_- ,$$

e \tilde{T}_+ é o operador companheiro para T_+ . Tendo-se assim que T_+ é um operador integral singular continuamente invertível com deslocamento.

Raciocinando de modo análogo, procuramos agora aplicar a M_0 a transformação inversa de (1.18). Para que os coeficientes matriciais de M_0 satisfaçam a relação (1.44) temos de escolher uma matriz X tal que a relação (1.52) seja satisfeita. É possível mostrar que da relação (1.52) decorre que

$$X = \mathcal{H}_+ \Lambda \Lambda_-^{-1} X(\alpha) e. \quad (1.53)$$

Fazendo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

e usando a igualdade matricial (1.53) é possível concluir que a matriz X tem uma estrutura especial que depende apenas das funções x_1 e x_3 :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_1} x_1(\alpha) + [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_2} P(t) x_3(\alpha) \\ x_3 & -\varepsilon [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_2} x_3(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Para que a matriz X seja não-degenerada escolhemos

$$x_3 \equiv 1 \text{ e } x_1(t) = (\alpha^-)^{\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2}} t^{\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}} \gamma, \text{ onde } \gamma > \frac{1}{2} \left\| (\alpha^-)^{\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}} t^{\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2}} P \right\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Vindo

$$X = \begin{pmatrix} [(\alpha^-)^{-1} t]^{\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}} \gamma & \varepsilon [(\alpha^-)^{-1} t]^{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}} \gamma + [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_2} P(t) \\ 1 & -\varepsilon [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_2} \end{pmatrix}, \det X \neq 0. \quad (1.54)$$

Consideramos agora o operador $M_0 = F I = F P_+ + F P_-$, com $F = \mathcal{A} C^+ X$. A escolha (1.54) para a matriz X garante que a igualdade $F = e F(\alpha) e$ é satisfeita.

Por outro lado, desta igualdade decorre que, sendo $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$, temos

$$f_{11} = f_{22}(\alpha) \quad , \quad f_{12} = f_{21}(\alpha). \quad (1.55)$$

Podemos, assim, aplicar ao operador M_0 a transformação inversa da transformação (1.18), obtendo-se o operador matricial diagonal

$$\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} G &= f_{11} P_+ + f_{21}(\alpha) U P_+ + f_{22}(\alpha) P_- + f_{12} U P_- , \\ \tilde{G} &= f_{11} P_+ - f_{21}(\alpha) U P_+ + f_{22}(\alpha) P_- - f_{12} U P_- . \end{aligned}$$

Tendo em conta as condições (1.55), obtêm-se os operadores continuamente invertíveis

$$G = f_{11} I + f_{12} U \quad , \quad \tilde{G} = f_{11} I - f_{12} U$$

sendo \tilde{G} o operador companheiro para G .

Finalmente consideramos o factor central

$$M_1 \equiv X^{-1}P_+ + X^{-1}\mathcal{H}_+\Lambda\Lambda_-^{-1}eP_- .$$

Do facto dos operadores M, M_0 e M_2 possuírem a estrutura (1.44) decorre que o operador M_1 também satisfaz esta identidade. No entanto, é possível verificar directamente que, se $\mathcal{A}_1 = X^{-1}$, $\mathcal{B}_1 = X^{-1}\mathcal{H}_+\Lambda\Lambda_-^{-1}e$, então $\mathcal{B}_1 = e\mathcal{A}_1(\alpha)e$. Uma vez mais aplicando a transformação inversa de (1.18), obtemos o operador matricial diagonal

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \tilde{N} \end{pmatrix} .$$

Para calcular os seus coeficientes, começamos por escrever a matriz X^{-1}

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X} \begin{pmatrix} -\varepsilon [(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_2} & -\varepsilon [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}} \gamma - [(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_2} P(t) \\ -1 & [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{\kappa_1-\kappa_2}{2}} \gamma \end{pmatrix} ,$$

e observamos que

$$\det X(\alpha) = [(\alpha^-)^{-1}t]^{-(\kappa_2+\kappa_1)} \det X . \quad (1.56)$$

Assim,

$$\begin{aligned} N &= -\frac{\varepsilon [(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_2}}{\det X} P_+ - \frac{1}{\det X(\alpha)} UP_+ + \frac{[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2}} \gamma}{\det X(\alpha)} P_- \\ &\quad - \frac{\varepsilon [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}} \gamma + [(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_2} P(t)}{\det X} UP_- \\ &= -\frac{1}{\det X} \left[\varepsilon [(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_2} P_+ + [(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_1+\kappa_2} UP_+ - [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{\kappa_1+3\kappa_2}{2}} \gamma P_- \right. \\ &\quad \left. + \left(\varepsilon [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}} \gamma + [(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_2} P(t) \right) UP_- \right] \\ &= -\frac{[(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_2}}{\det X} \left[\varepsilon P_+ + [(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_1} UP_+ - [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}} \gamma P_- \right. \\ &\quad \left. + \left(\varepsilon [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{\kappa_1-\kappa_2}{2}} \gamma + P(t) \right) UP_- \right] \\ &= -\frac{[(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_2}}{\det X} \left(P_+ + [(\alpha^-)^{-1}t]^{\kappa_1} P_- \right) \times [\varepsilon P_+ + UP_+ \\ &\quad - [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2}} \gamma P_- + \left(\varepsilon [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{\kappa_1-\kappa_2}{2}} \gamma + P(t) \right) UP_-] , \end{aligned}$$

sendo a última igualdade obtida com recurso às igualdades

$$P_{\pm}UP_{\pm} = 0 \quad \text{e} \quad P_{\pm}UP_{\mp} = UP_{\mp}$$

que decorrem de $US = -SU$ e $S^2 = I$.

Acabamos, assim, de obter uma factorização do operador T na forma

$$T = GNT_+$$

onde G é um operador funcional continuamente invertível e T_+ é um operador integral singular com deslocamento continuamente invertível. Consequentemente,

$$\dim \ker T = \dim \ker N ,$$

sendo, por isso, possível obter a teoria de resolubilidade do operador T a partir da dimensão e estrutura dos subespaços de defeito do operador N com coeficientes racionais.

Observamos que $\text{Ind}_{\mathbb{T}} [(\alpha^-)^{-1} t] = 1$, pois $(\alpha^-)^{-1} t = \frac{\beta t - 1}{i\lambda}$ tem um zero simples no ponto $t = \frac{1}{\beta}$ e $|\beta| > 1$.

Notamos também que

$$\ker N = \ker N_1 \cap \ker N_2$$

onde

$$\begin{aligned} N_1 &= P_+ + [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_1} P_- , \\ N_2 &= \varepsilon P_+ + UP_+ - [(\alpha^-)^{-1} t]^{\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2}} \gamma P_- + \left(\varepsilon [(\alpha^-)^{-1} t]^{\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}} \gamma + P(t) \right) UP_- . \end{aligned}$$

Assim, se $\kappa_1 \leq 0$, o núcleo do operador N_1 e, consequentemente, o núcleo do operador N é trivial, i.e., se $\kappa_1 \leq 0$ então $\dim \ker T = \dim \ker N = 0$. Por outro lado, se o operador N_1 tiver um núcleo não-trivial, a estrutura do núcleo de N depende do operador 4-nomial N_2 .

Consideremos agora o caso $\kappa_1 > 0$. Nesta situação, resulta da fórmula para a solução geral do problema de limite de Riemann

$$\Phi^+(t) = [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_1} \Phi^-(t) ,$$

que o núcleo do operador N_1 é não-trivial, tendo-se

$$\ker N_1 = \left\{ \varphi : \varphi = r_j - [(\alpha^-)^{-1} t]^{-\kappa_1} r_j \right\}$$

onde r_j é um polinómio de grau j ($j \in \{0, 1, \dots, \kappa_1 - 1\}$) na variável $(\alpha^-)^{-1} t$. No entanto, para obtermos o núcleo do operador N é necessário observar que, para que $\psi \in \ker N$, temos que ter $\psi \in \ker N_1$ e $\psi \in \ker N_2$. Para isso é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \varepsilon \Psi_+ + \left(\varepsilon [(\alpha^-)^{-1} t]^{\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}} \gamma + P(t) \right) U \Psi_- &= r_j \\ \Psi_+ - [(\alpha^-)^{-1} t]^{\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}} \gamma U \Psi_- &= - [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_1} U r_j \end{aligned} \tag{1.57}$$

onde $\Psi_{\pm} = P_{\pm} \psi$.

Calculando o determinante, $\Delta(t)$, do sistema (1.57), e como $\det X(t) \neq 0$, obtemos

$$\Delta(t) = -2\varepsilon \left[(\alpha^-)^{-1} t \right]^{\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}} \gamma - P(t) = \left[(\alpha^-)^{-1} t \right]^{-\kappa_2} \det X(t) \neq 0. \quad (1.58)$$

Em seguida, somando a primeira equação de (1.57) à segunda multiplicada por $-\varepsilon$, obtemos a equação

$$-\Delta(t) U \Psi_- = r_j + \varepsilon \left[(\alpha^-)^{-1} t \right]^{\kappa_1} U r_j. \quad (1.59)$$

De (1.58) e (1.56), verifica-se que

$$\Delta(\alpha(t)) = \left[(\alpha^-)^{-1} t \right]^{\kappa_2 - \kappa_1} \Delta(t). \quad (1.60)$$

A partir das equações (1.59) e (1.60) é possível obter a equação

$$U \Psi_- = \varepsilon \left[(\alpha^-)^{-1} t \right]^{\kappa_2} \Psi_-. \quad (1.61)$$

Uma vez que $\kappa_1 \geq \kappa_2$ e $\kappa_1 > 0$, temos que considerar separadamente os casos $\kappa_2 \leq 0$ e $\kappa_2 > 0$. Começemos pelo caso $\kappa_2 \leq 0$. Com esta hipótese os membros esquerdo e direito da equação (1.61) pertencem aos subespaços $L_p^+(\mathbb{T})$ e $L_p^-(\mathbb{T})$, respectivamente, e de (1.61) decorre que $U \Psi_- = 0$. Assim, de (1.59), obtemos

$$\left[I + \varepsilon \left[(\alpha^-)^{-1} t \right]^{\kappa_1} U \right] r_j = 0. \quad (1.62)$$

Uma vez que a equação (1.62) tem o mesmo número de soluções que o sistema (1.57), resta-nos contar o número de soluções linearmente independentes desta equação e encontrá-las. Para isso começamos por introduzir o operador

$$P = \frac{1}{2} \left(I + \varepsilon \left[(\alpha^-)^{-1} t \right]^{\kappa_1} U \right),$$

que é uma projecção definida no espaço dos polinómios na variável $\hat{t} = (\alpha^-)^{-1} t$ com grau não superior a $\kappa_1 - 1$. Considerando a projecção complementar a P , dada por $Q = I - P$, temos que $\ker P = \text{im} Q$. Assim, o problema de caracterização do núcleo de P reduz-se ao estudo do subespaço $\text{im} Q$. A representação matricial do operador Q , quando consideramos a base

$$\chi_\kappa = \left[(\alpha^-)^{-1} t \right]^\kappa, \quad \kappa = 0, 1, \dots, \kappa_1 - 1,$$

conduz-nos, quer no caso κ_1 par, quer no caso κ_1 ímpar, a matrizes simétricas e idempotentes. Deste modo, para calcular $\dim \text{im} Q$, basta ter em conta que tais matrizes tem a característica igual ao traço e obtemos

$$\dim \ker P = \dim \text{im} Q = \begin{cases} \frac{\kappa_1 - \varepsilon}{2} & \text{se } \kappa_1 \text{ é ímpar} \\ \frac{\kappa_1}{2} & \text{se } \kappa_1 \text{ é par} \end{cases}.$$

Relativamente à construção de uma base para $\ker P$, é possível observar directamente que as soluções do sistema (1.57) têm a forma

$$\Psi_+^{(j)} = \varepsilon r_j, \quad \Psi_-^{(j)} \equiv 0, \quad (1.63)$$

com $r_j = [(\alpha^-)^{-1} t]^j - \varepsilon [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_1 - j - 1}$, $j = 0, 1, \dots, \dim \ker P - 1$.

Seja agora $\kappa_2 > 0$. Também neste caso as funções (1.63) são soluções do sistema (1.57) mas, nesta situação, a equação (1.61) é um problema de limite de Riemann homogéneo, que pode ser reescrito na forma

$$\frac{1}{2} \left(I - \varepsilon [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_1} U \right) \Psi_- = 0$$

Assim, o mesmo raciocínio que utilizamos para contar o número e encontrar as soluções linearmente independentes da equação (1.62), permite-nos concluir que o problema de limite (1.61) tem $\frac{1}{2}(\kappa_2 + \varepsilon)$ soluções independentes se κ_2 é ímpar, e $\frac{\kappa_2}{2}$ soluções independentes se κ_2 é par. Obtemos ainda que estas soluções têm a forma

$$U \Psi_-^{(j)} = [(\alpha^-)^{-1} t]^j + \varepsilon [(\alpha^-)^{-1} t]^{\kappa_2 - j - 1},$$

com $j = 0, 1, \dots, \frac{\kappa_2 + \varepsilon}{2} - 1$ se κ_2 é ímpar, e $j = 0, 1, \dots, \frac{\kappa_2}{2} - 1$ se κ_2 é par.

Assim, se $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 > 0$, então o número de soluções linearmente independentes da equação (1.43) (com $\alpha = \alpha_-$) é dado por

$$\begin{cases} \frac{\kappa_1 - \varepsilon}{2} + \frac{\kappa_2 + \varepsilon}{2} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} & \text{se } \kappa_1 \text{ e } \kappa_2 \text{ são números ímpares} \\ \frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_2}{2} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} & \text{se } \kappa_1 \text{ e } \kappa_2 \text{ são números pares} \end{cases}.$$

Não é possível que um dos índices parciais seja par e o outro seja ímpar pois, como já foi referido, κ_1 e κ_2 têm que ser ambos pares ou ambos ímpares porque $\kappa_1 + \kappa_2 = 2 \text{ind} T$, logo é sempre par.

Resumimos os factos provados no seguinte

Teorema 1.31 *Supunhamos que o operador*

$$T = (aI + bU) P_+ + (cI + dU) P_-$$

é Noetheriano. Seja

$$M = P_+ + \mathcal{C} P_- \quad , \quad \mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$$

o operador correspondente, e assumamos que $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$ admite a factorização (1.45)

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \Lambda \mathcal{C}^-$$

com índices parciais κ_1 e κ_2 ($\kappa_1 \geq \kappa_2$). Sendo

$$\mathcal{H}_+ = \Lambda_+ \mathcal{C}^- (\alpha) e \mathcal{C}^+ = \begin{pmatrix} \varepsilon & P_{\kappa_1 - \kappa_2}(t) \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

com $P_{\kappa_1 - \kappa_2}(t)$ um polinómio de grau não superior a $\kappa_1 - \kappa_2$.

Então

(i) *se $\kappa_1 \leq 0$ e $\kappa_2 \leq 0$, $\ker T = \{0\}$;*

(ii) *se $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 \leq 0$,*

$$\dim \ker T = \begin{cases} \frac{\kappa_1}{2} & \text{se } \kappa_1 \text{ é par} \\ \frac{\kappa_1 - \varepsilon}{2} & \text{se } \kappa_1 \text{ é ímpar} \end{cases};$$

(iii) *se $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 > 0$, $\dim \ker T = \text{ind} T = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$.*

1.3.3 Factorização efectiva nos casos de matrizes diagonais e triangulares

Nesta subsecção começamos por apresentar um caso especial de um operador integral singular com um deslocamento linear fraccionário de Carleman inverso ($\alpha = \alpha_-$) que nos permite obter uma factorização explícita da matriz \mathcal{C} correspondente. Mais concretamente, voltamos a considerar o operador T (ver(1.43)) mas, impomos aos coeficientes as seguintes restricções

$$a(t)a(\alpha(t)) = b(t)b(\alpha(t)) \quad \text{e} \quad c(t)c(\alpha(t)) = d(t)d(\alpha(t)) . \quad (1.64)$$

Estas restricções conduzem-nos a uma matriz $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ diagonal, que admite uma factorização na forma explícita que permite que os números κ_1 , κ_2 e ε sejam calculados. Assim, neste caso, é possível obter a teoria de resolubilidade completa para o operador T . Este caso especial foi considerado por Kovaliova (Drekova) e Kravchenko em [15] (ver também [26], Sec. 21.3).

Consideremos o operador (1.43) no espaço $H_\mu(\mathbb{T})$, com as condições adicionais (1.64) impostas aos coeficientes. Considerando as funções V e Δ definidas na Subsecção 1.3.1 por:

$$\Delta(t) = a(t)c(\alpha(t)) - d(t)b(\alpha(t)) \quad \text{e} \quad V(t) = c(\alpha(t))b(t) - a(\alpha(t))d(t) ,$$

das igualdades (1.64) resulta que

$$V(t) = b(t)a^{-1}(t)\Delta(t) , \quad -V(\alpha(t)) = c(t)d^{-1}(t)\Delta(t) \quad (1.65)$$

Nestas condições temos que a matriz $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ é dada por

$$\mathcal{C} = \Delta^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 & V(t) \\ -V(\alpha(t)) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b(t)}{a(t)} \\ \frac{c(t)}{d(t)} & 0 \end{pmatrix} ,$$

onde a última igualdade decorre das fórmulas (1.65).

Seja $k = \text{Ind}_{\mathbb{T}} V(t)$ e $V(t) = f^+ t^k f^-$, com $(f^+)^{\pm 1} \in H_\mu^+(\mathbb{T})$ e $(f^-)^{\pm 1} \in H_\mu^-(\mathbb{T})$, uma factorização da função $V(t)$ no espaço de Hölder $H_\mu(\mathbb{T})$. Analogamente, seja $\Delta(t) = g^+ t^{-\kappa} g^-$ ($(g^+)^{\pm 1} \in H_\mu^+(\mathbb{T})$, $(g^-)^{\pm 1} \in H_\mu^-(\mathbb{T})$) uma factorização da função $\Delta(t)$ no mesmo espaço, onde $\kappa = \text{ind} T$. Assim, temos as seguintes factorizações

$$\frac{b}{a} = \frac{f^+}{g^+} t^{\kappa+k} \frac{f^-}{g^-} , \quad \frac{c}{d} = -\frac{f^-(\alpha)}{g^+} (\alpha^+)^k t^{\kappa-k} (\alpha^-)^k \frac{f^+(\alpha)}{g^-} . \quad (1.66)$$

Então a matriz \mathcal{C} pode ser factorizada da seguinte forma

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b(t)}{a(t)} \\ \frac{c(t)}{d(t)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f^+}{g^+} & 0 \\ 0 & -\frac{f^-(\alpha)}{g^+} (\alpha^+)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{\kappa+k} & 0 \\ 0 & t^{\kappa-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{f^-}{g^-} \\ \frac{f^+(\alpha)}{g^-} (\alpha^-)^k & 0 \end{pmatrix} . \quad (1.67)$$

Temos, assim, que os índices parciais da matriz \mathcal{C} são $\kappa_1 = \kappa + k$ e $\kappa_2 = \kappa - k$. Usamos agora os resultados da subsecção anterior para obter a teoria de resolubilidade do operador T .

Se $\kappa + k \leq 0$ e $\kappa - k \leq 0$, então $\ker T = \{0\}$.

Se $\kappa + k > 0$ e $\kappa - k > 0$, então $\dim \ker T = \frac{\kappa+k+\kappa-k}{2} = \kappa = \text{ind} T$.

Resta-nos considerar os dois casos seguintes:

- (i) $\kappa + k \geq \kappa - k$, $\kappa + k > 0$, $\kappa - k \leq 0$
(ii) $\kappa - k \geq \kappa + k$, $\kappa + k \leq 0$, $\kappa - k > 0$.

No caso (i) a factorização (1.67) da matriz \mathcal{C} é uma factorização com os índices parciais crescentes. Se $\kappa_1 = \kappa + k$ é um número par, então pelo Teorema 1.31 e da primeira factorização em (1.66) obtemos

$$\dim \ker T = \frac{\kappa_1}{2} = \frac{1}{2} \text{Ind}_{\mathbb{T}} \frac{b(t)}{a(t)}.$$

Se $\kappa_1 = \kappa + k$ é um número ímpar, do Teorema 1.31 decorre que

$$\dim \ker T = \frac{\kappa_1 - \varepsilon}{2} = \frac{\kappa + k - \varepsilon}{2}.$$

Calculando a matriz $\mathcal{H}_+ = \Lambda_+ \mathcal{C}^- (\alpha) e \mathcal{C}^+$, obtemos

$$\mathcal{H}_+ = \begin{pmatrix} (\alpha^+)^{\kappa+k} \frac{f^+ f^-(\alpha)}{g^+ g^-(\alpha)} & 0 \\ 0 & -(\alpha^+)^{\kappa+k} \frac{f^+ f^-(\alpha)}{g^+ g^-(\alpha)} \end{pmatrix}.$$

Para calcular o número ε temos de considerar a matriz $\mathcal{H}_+(\tau)$, onde τ é o ponto fixo do deslocamento α ($\alpha(\tau) = \tau$) no qual $\alpha^+(\tau) = \tau$. Deste modo, obtemos

$$\varepsilon = (\alpha^+(\tau))^{\kappa+k} \frac{f^+(\tau) f^-(\alpha(\tau))}{g^+(\tau) g^-(\alpha(\tau))} = \frac{f^+(\tau) \tau^{\kappa+k} f^-(\tau)}{g^+(\tau) g^-(\tau)} = \frac{b(\tau)}{a(\tau)}.$$

Consideremos agora o caso (ii). Analogamente ao caso (i), de acordo com o Teorema 1.31 e usando a segunda factorização em (1.66), obtemos que se $\kappa - k$ é um número par, então

$$\dim \ker T = \frac{\kappa - k}{2} = \frac{1}{2} \text{Ind}_{\mathbb{T}} \frac{c(t)}{d(t)}.$$

Por outro lado, se $\kappa - k$ é um número ímpar, então

$$\dim \ker T = \frac{\kappa - k - \varepsilon}{2}.$$

Passemos agora ao cálculo do número ε . Como, neste caso, $\kappa - k \geq \kappa + k$, começamos por obter uma factorização da matriz \mathcal{C} com os índices parciais crescentes. Para isso, basta notar que, da fórmula (1.67), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} \frac{f^+}{g^+} & 0 \\ 0 & -\frac{f^-(\alpha)}{g^+} (\alpha^+)^k \end{pmatrix} e e \begin{pmatrix} t^{\kappa+k} & 0 \\ 0 & t^{\kappa-k} \end{pmatrix} e e \begin{pmatrix} 0 & \frac{f^-}{g^-} \\ \frac{f^+(\alpha)}{g^-} (\alpha^-)^k & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{f^+}{g^+} \\ -\frac{f^-(\alpha)}{g^+} (\alpha^+)^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{\kappa-k} & 0 \\ 0 & t^{\kappa+k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{f^+(\alpha)}{g^-} (\alpha^-)^k & 0 \\ 0 & \frac{f^-}{g^-} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta factorização obtemos

$$\mathcal{H}_+ = \begin{pmatrix} -(\alpha^+)^{\kappa+k} \frac{f^+ f^-(\alpha)}{g^+ g^-(\alpha)} & 0 \\ 0 & (\alpha^+)^{\kappa+k} \frac{f^+ f^-(\alpha)}{g^+ g^-(\alpha)} \end{pmatrix}.$$

Calculando \mathcal{H}_+ no ponto fixo, τ , de α tal que $\alpha^+(\tau) = \tau$, obtemos

$$\varepsilon = -\frac{b(\tau)}{a(\tau)}.$$

Continuando a considerar o operador T (ver(1.43)) com um deslocamento linear fraccionário de Carleman ($\alpha = \alpha_-$), passamos agora a estudar o caso em que é satisfeita apenas a primeira das condições (1.64). A matriz \mathcal{C} que é obtida nestas condições é uma matriz triângular cujos índices parciais podem ser obtidos por redução do problema de limite matricial a um sistema de dois problemas de limite de Riemann escalares.

Sejam Δ_1 e Δ_2 as funções introduzidas no Teorema 1.20:

$$\Delta_1(t) = c(t)c(\alpha(t)) - d(t)d(\alpha(t)) \text{ e } \Delta_2(t) = a(t)a(\alpha(t)) - b(t)b(\alpha(t)).$$

Consideremos agora o operador (1.43) no espaço $H_\mu(\mathbb{T})$, com a condição $\Delta_2(t) \equiv 0$. Neste caso a matriz $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ tem a forma

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} \Delta_1(t) & V(t) \\ -V(\alpha) & 0 \end{pmatrix}.$$

Em vez da matriz \mathcal{C} , podemos estudar a matriz

$$\widehat{\mathcal{C}} = \Delta e \mathcal{C} e = \begin{pmatrix} 0 & -V(\alpha) \\ V(t) & \Delta_1(t) \end{pmatrix}.$$

Seja $V(t) = f^+(t)t^k f^-(t)$ uma factorização da função V . Então $-V(\alpha) = f_1^+(t)t^{-k}f_1^-(t)$, com $f_1^+ = -f^-(\alpha)(\alpha^+)^k$ e $f_1^- = (\alpha^-)^k f^+(\alpha)$. Obtendo-se

$$\widehat{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & f_1^+(t)t^{-k}f_1^-(t) \\ f^+(t)t^k f^-(t) & \Delta_1(t) \end{pmatrix}.$$

Uma vez que esta é uma matriz triângular, os índices parciais do problema de limite de Riemann

$$\begin{cases} \Phi_1^{*+}(t) = 0 \Phi_1^{*-}(t) - V(\alpha) \Phi_2^{*-}(t) \\ \Phi_2^{*+}(t) = V(t) \Phi_1^{*-}(t) + \Delta_1(t) \Phi_2^{*-}(t) \end{cases} \quad (1.68)$$

podem ser encontrados resolvendo sucessivamente o primeiro e o segundo problemas de limite de Riemann em (1.68) para as funções seccionalmente analíticas que se anulam no infinito $\{\Phi_1^{*+}(z), \Phi_2^{*-}(z)\}$ e $\{\Phi_2^{*+}(z), \Phi_1^{*-}(z)\}$, respectivamente.

Seja $k = \text{Ind}_{\mathbb{T}} V \geq 0$. Então o problema de limite de Riemann $\Phi_1^{*+}(t) = -V(\alpha) \Phi_2^{*-}(t)$ não tem soluções não triviais. Assim $\Phi_1^{*+}(z) \equiv 0$ e $\Phi_2^{*-}(z) \equiv 0$. Por outro lado, o problema de Riemann $\Phi_2^{*+}(t) = V(t) \Phi_1^{*-}(t)$ tem $k \geq 0$ soluções linearmente independentes :

$$\Phi_2^{*+}(z) = f^+ P_{k-1}(z), \quad \Phi_1^{*-}(z) = z^{-k} (f^-)^{-1} P_{k-1}(z),$$

onde $P_{k-1}(z)$ é um polinómio de grau $k-1$ com coeficientes complexos arbitrários. Assim, para o caso $k \geq 0$, o problema homogéneo de Riemann com a matriz $\widehat{\mathcal{C}}$ tem k soluções linearmente independentes. Como o índice total $\kappa^* = \frac{1}{2\pi} \{\arg VV(\alpha)\} = 0$,

o problema correspondente não homogéneo é solúvel se forem satisfeitas k condições de resolubilidade. Obtendo-se que os índices parciais da matriz \widehat{C} são dados por $\kappa_1^* = k$ e $\kappa_2^* = -k$.

Consideremos agora o caso $k = \text{Ind}_{\mathbb{T}} V < 0$. Nesta situação obtemos o problema de Riemann $\Phi_1^{*+}(t) = -V(\alpha) \Phi_2^{*-}(t)$ com o coeficiente $-V(\alpha) = f_1^+(t) t^{-k} f_1^-(t)$. As funções canónicas deste problema têm a forma

$$\chi_1^{*+}(z) = f_1^+ = -f^-(\alpha) (\alpha^+)^k, \quad \chi_2^{*-}(z) = z^k (f_1^-)^{-1} = z^k (\alpha^-)^{-k} [f^+(\alpha)]^{-1}.$$

A solução geral do primeiro problema de Riemann em (1.68) é dada pelas fórmulas:

$$\Phi_1^{*+}(z) = -f^-(\alpha) (\alpha^+)^k P_{-k-1}(z), \quad \Phi_2^{*-}(z) = z^k (\alpha^-)^{-k} [f^+(\alpha)]^{-1} P_{-k-1}(z). \quad (1.69)$$

Substituindo agora a factorização de $V(t)$ e $\Phi_2^{*-}(t)$ na segunda linha de (1.68), obtemos

$$\Phi_2^{*+}(t) = G(t) \Phi_1^{*-}(t) + g(t),$$

com $G(t) = f^+(t) t^k f^-(t)$, $g(t) = \Delta_1(t) t^k (\alpha^-)^{-k} [f^+(\alpha)]^{-1} P_{-k-1}(t)$. Sendo as funções canónicas do problema (1.69) dadas por

$$\chi_2^{*+}(z) = f^+(z) \text{ e } \chi_1^{*-}(z) = z^{-k} [f^-(z)]^{-1}.$$

Como $k < 0$, para a resolubilidade do problema (1.69) são necessárias e suficientes $-k$ condições de resolubilidade

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{\chi_2^{*+}(t)} t^s dt = 0, \quad s = 0, 1, \dots, -k-1. \quad (1.70)$$

Substituindo em (1.70) $g(t)$ e $\chi_2^{*+}(t)$ e tendo em conta que $t = e^{i\varphi}$, $dt = itd\varphi$ chegamos ao sistema de $-k$ equações lineares algébricas com $-k$ incógnitas c_j (que são os coeficientes do polinómio $P_{-k-1}(t)$)

$$\sum_{j=0}^{-k-1} c_j i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Delta_1(t) (\alpha^-)^{-k} [f^+(\alpha)]^{-1}}{f^+(t)} t^j (\bar{t})^{-k-s-1} d\varphi = 0, \quad s = 0, 1, \dots, -k-1. \quad (1.71)$$

Se $\Delta_1(t) \neq 0$ então o determinante do sistema (1.71) não é zero pois é um determinante de Gram do sistema de funções linearmente independentes $\{t^r\}_{r=0, \pm 1, \dots, \pm(-k-1)}$

com o peso $\frac{\Delta_1(t) (\alpha^-)^{-k} [f^+(\alpha)]^{-1}}{f^+(t)} \neq 0$ sobre \mathbb{T} . Assim, para o sistema não homogéneo correspondente, as constantes c_j definem-se univocamente.

Concluimos que, se $k < 0$, então o problema (1.68) têm $-k$ soluções linearmente independentes sendo satisfeitas $-k$ condições de resolubilidade, ou seja, $\kappa_1^* = -k$ e $\kappa_2^* = k$.

Nesta secção consideramos apenas o caso de um deslocamento linear fraccionário de Carleman inverso nos casos em que a matriz C obtida é diagonal ou triangular. Contudo, os resultados obtidos coincidem com os resultados existentes para o caso de um deslocamento inverso de Carleman qualquer (ver [26], Cap. 5). Esta constatação sugere-nos a seguinte questão: serão os resultados obtidos na Secção 1.3.2 válidos para qualquer deslocamento de Carleman?

1.4 Factorização de matrizes de Hermite

Nesta secção procuramos expôr alguns resultados de Litvinchuk e Spitkovsky [27], [28], que permitem o cálculo dos índices parciais de uma função matricial hermiteana com determinante negativo.

Começamos por introduzir alguns conceitos essenciais. Consideramos o operador de Hankel

$$H(G) = P_- G P_+ .$$

A função G chama-se *símbolo do operador de Hankel*.

Juntamente com este operador, consideramos também o operador

$$(H(G) H(G)^*)^{\frac{1}{2}} = |H(G)| ,$$

onde $H(G)^*$ é o operador conjugado de $H(G)$.

Seja $s_\infty(G)$ o fim direito do *espectro de condensação* (i.e., o conjunto dos pontos do espectro, dos pontos de limite do espectro e dos valores próprios de multiplicidade infinita) do operador $|H(G)|$. Seja $s_0(G) \geq s_1(G) \geq \dots$, a sucessão dos valores próprios do operador $|H(G)|$. Estes números chamam-se *números-s* do operador inicial, $H(G)$.

Se a sucessão $s_0(G) \geq s_1(G) \geq \dots$ tiver um número finito de termos, q , então, por definição, pomos $s_q(G) = s_{q+1}(G) = \dots = s_\infty(G)$.

Consideremos, agora uma função matricial não-degenerada

$$G(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix} , \tag{1.72}$$

com $a, d, b \in H_\mu(\mathbb{T})$, sendo a e d funções reais.

Como $\det G(t) \neq 0$, a função $\Delta(t) = \det G(t) = ad - |b|^2$ preserva o seu sinal sobre \mathbb{T} . Se $\Delta(t) > 0$, então, conforme foi mostrado em [35], os índices parciais da matriz $G(t)$ são iguais a zero. Consideremos o caso $\Delta(t) < 0$. Vamos assumir também que, pelo menos um dos elementos da diagonal da função matricial $G(t)$ não se anula sobre \mathbb{T} . Seja, por exemplo, $d(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}$, então existem as representações

$$\Delta = -|\Delta_+|^2 \text{ e } d^2 = |d_+|^2 ,$$

com $\Delta_+^{\pm 1}$ e $d_+^{\pm 1}$ pertencentes à classe A das funções analíticas em $|z| < 1$ e contínuas em $|z| \leq 1$ (ver, por exemplo, [7]). Agora introduzimos o operador de Hankel

$$H(\omega) = P_- \omega P_+ ,$$

com o símbolo $\omega = \frac{b}{d} \frac{d_+}{\Delta_+}$.

Teorema 1.32 *Os índices parciais da função matricial (1.72), com $\Delta < 0$ são iguais a l e $-l$, onde $l (\geq 0)$ é a multiplicidade do 1 como número $-s$ do operador $H(\omega)$.*

Em particular, os índices parciais da matriz (1.72) são iguais a zero se e só se o operador $I - H(\omega)^ H(\omega)$ é invertível.*

O teorema seguinte dá-nos outro método para o cálculo dos índices parciais da função matricial G .

Teorema 1.33 *Seja m o menor número de coincidências (contando com as multiplicidades) em $|z| < 1$ das funções racionais r_1 e r_2 , que não tem pólos comuns em $|z| < 1$ e satisfazem sobre \mathbb{T} as desigualdades*

$$|b(t) - d(t)r_1(t)| < \sqrt{-\Delta(t)} < |b(t) - d(t)r_2(t)| .$$

Então os índices parciais da matriz (1.72) são iguais a $\pm m$.

Os Teoremas 1.32 e 1.33 foram obtidos por Litvinchuk e Spitkovsky. Uma apresentação mais pormenorizada do material aqui considerado pode encontrar-se em [27] e [28] (ver também [26]).

1.5 Teoria de Noether de equações integrais singulares com um deslocamento não Carlemaniano

Esta secção será essencialmente dedicada à construção da teoria de Noether de operadores integrais singulares com um deslocamento não Carlemaniano, no entanto consideraremos também aqui o caso de um deslocamento directo de Carleman com pontos periódicos de multiplicidade $k \geq 2$. Este estudo será feito para operadores actuando na classe $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, para qualquer curva fechada de Lyapunov Γ . Uma exposição mais detalhada, bem como as provas dos teoremas que aqui serão apresentados, podem ser encontradas em [17].

Tendo em conta a Definição 1.4 e as observações feitas após a mesma, denotamos por $\mathcal{M}(\alpha, k)$ o conjunto dos pontos periódicos do deslocamento α com multiplicidade k . Usando esta notação podemos fazer a classificação dos deslocamentos sobre uma curva Γ nas seguintes classes:

- Classe \mathcal{M}_1^+ - deslocamentos que preservam a orientação, tais que, para algum $k \geq 2$, $\mathcal{M}(\alpha, k) = \Gamma$ (deslocamentos de Carleman).
- Classe \mathcal{M}_2^+ - deslocamentos que preservam a orientação cujos pontos periódicos não coincidem com toda a curva Γ .
- Classe \mathcal{M}_3^+ - deslocamentos que preservam a orientação e não têm pontos periódicos (deslocamentos ergódicos).
- Classe \mathcal{M}_1^- - deslocamentos que mudam a orientação, tais que $\alpha_2(t) \equiv t$ (deslocamentos de Carleman).
- Classe \mathcal{M}_2^- - deslocamentos que mudam a orientação, tais que $\alpha_2 \in \mathcal{M}_2^+$, com $\mathcal{M}(\alpha_2, 1) \neq \emptyset$.

Passamos agora ao estudo da teoria de Noether de operadores integrais singulares com deslocamento, da forma

$$T(A, B) = AP_+ + BP_- : L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma) ,$$

onde $A = aI + bU$ e $B = cI + dU$ são operadores funcionais, sendo U o operador introduzido na Secção 1.1 por $(U\varphi)(t) = |\alpha'(t)|^{\frac{1}{p}} \varphi(\alpha(t))$, e $a, b, c, d \in C(\Gamma)$.

Começamos por considerar o caso em que o deslocamento α preserva a orientação.

Antes de mais, referimos que a Noetheridade do operador $T(A, B)$ é equivalente à invertibilidade contínua dos operadores funcionais A e B . Por sua vez, uma condição necessária e suficiente para a invertibilidade do operador funcional $A = aI + bU$ é $\inf |\nu_\alpha(a, b)| > 0$, sendo a função $\nu_\alpha(x, y)$, para $x, y \in C(\Gamma)$, definida como se segue.

Se α é um deslocamento de Carleman que preserva a orientação tal que, para algum $k \geq 2$, $\mathcal{M}(\alpha, k) = \Gamma$,

$$\nu_\alpha(x, y) = \prod_{i=0}^{k-1} x(\alpha_i(t)) + (-1)^{k-1} \prod_{i=0}^{k-1} b(\alpha_i(t)) . \quad (1.73)$$

Se α é um deslocamento da classe \mathcal{M}_2^+ , que tem um número finito l de pontos fixos $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l$, i.e., $\mathcal{M}(\alpha, 1)$ é um conjunto finito,

$$\nu_\alpha(x, y) = \begin{cases} x(t) & , \text{ se } |x(\tau_i)| > |y(\tau_j)|, \text{ para qualquer } j \in \{1, \dots, l\} \\ y(t) & , \text{ se } |x(\tau_i)| < |y(\tau_j)|, \text{ para qualquer } j \in \{1, \dots, l\} \\ 0 & , \text{ nos restantes casos} \end{cases} . \quad (1.74)$$

Se α é um deslocamento com um conjunto finito de pontos periódicos, $\{\tau_i\}_{i=1, \dots, l}$, com multiplicidade $k > 1$, i.e., α é um deslocamento da classe \mathcal{M}_2^+ e existe um $k > 1$ tal que $\mathcal{M}(\alpha, k)$ é finito e não vazio,

$$\nu_\alpha(x, y) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{k-1} x(\alpha_i(t)) & , \text{ se } \prod_{i=0}^{k-1} |x(\alpha_i(\tau_j))| > \prod_{i=0}^{k-1} |y(\alpha_i(\tau_j))|, \\ & \text{para qualquer } j \in \{1, \dots, l\} \\ (-1)^{k-1} \prod_{i=0}^{k-1} y(\alpha_i(t)) & , \text{ se } \prod_{i=0}^{k-1} |x(\alpha_i(\tau_j))| < \prod_{i=0}^{k-1} |y(\alpha_i(\tau_j))|, \\ & \text{para qualquer } j \in \{1, \dots, l\} \\ 0 & , \text{ nos restantes casos} \end{cases} . \quad (1.75)$$

Consideremos agora uma generalização dos três casos anteriores. Mais concretamente, introduzimos a definição da função ν_α no caso em que α é um deslocamento ao qual impomos apenas que tenha um conjunto não vazio de pontos periódicos, i.e., para algum $k \geq 1$, $\mathcal{M}(\alpha, k) \neq \emptyset$. Neste caso, antes de passarmos à definição da função ν_α , começamos por introduzir alguns conjuntos. Assim, designamos por $\text{supp}(\tau - \alpha_k(\tau))$ o fecho do conjunto dos pontos não periódicos (para os quais

$\alpha_k(\tau) \neq \tau$). Sejam $u, x, y \in C(\Gamma)$, $u_\pm(t) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \prod_{i=0}^{k-1} |u(\alpha_{n+i}(t))|$, e

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x, y) &= \Gamma \setminus \text{supp}(\tau - \alpha_k(\tau)), \\ \Gamma_2(x, y) &= \{t \in \text{supp}(\tau - \alpha_k(\tau)) : x_\pm(t) > y_\pm(t)\}, \\ \Gamma_3(x, y) &= \{t \in \text{supp}(\tau - \alpha_k(\tau)) : x_\pm(t) < y_\pm(t)\}, \\ \Gamma_4(x, y) &= \Gamma \setminus \bigcup_{j=1}^3 \Gamma_j(x, y), \end{aligned}$$

onde é usado o mesmo sinal (+ ou -) em ambas as desigualdades. Quanto à função ν_α , neste caso toma a forma

$$\nu_\alpha(x, y) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{k-1} x(\alpha_i(t)) + (-1)^{k-1} \prod_{i=0}^{k-1} y(\alpha_i(t)) & , t \in \Gamma_1(x, y), \\ \prod_{i=0}^{k-1} x(\alpha_i(t)) & , t \in \Gamma_2(x, y), \\ (-1)^{k-1} \prod_{i=0}^{k-1} y(\alpha_i(t)) & , t \in \Gamma_3(x, y), \\ 0 & , t \in \Gamma_4(x, y) \end{cases} \quad (1.76)$$

As condições de Noether e as fórmulas para o índice do operador $T(A, B)$, com um deslocamento de um dos tipos referidos, são expressas pelos seguintes teoremas.

Teorema 1.34 *O operador*

$$T(A, B) = (aI + bU)P_+ + (cI + dU)P_- : L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma),$$

com $a, b, c, d \in C(\Gamma)$, $(U\varphi)(t) = |\alpha'(t)|^{\frac{1}{p}} \varphi(\alpha(t))$, e para algum $k \geq 2$, $U^k = I$, é Noetheriano se e só se

$$\inf_{\Gamma} |\nu_\alpha(a, b)| > 0 \text{ e } \inf_{\Gamma} |\nu_\alpha(c, d)| > 0,$$

onde ν_α é a função definida pela fórmula (1.73).

O índice do operador Noetheriano $T(A, B)$ é determinado pela fórmula

$$\text{ind}T(A, B) = \frac{1}{2\pi k} \left\{ \arg \frac{\nu_\alpha(c, d)}{\nu_\alpha(a, b)} \right\}_{\Gamma}.$$

Quando α é um deslocamento directo com um número finito de pontos fixos $\{\tau_i\}_{i=1, \dots, l}$, a teoria de Noether do operador $T(A, B)$ é a seguinte,

Teorema 1.35 *O operador*

$$T(A, B) = (aI + bU)P_+ + (cI + dU)P_- : L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma),$$

é Noetheriano se e só se

$$\inf_{\Gamma} |\nu_\alpha(a, b)| > 0 \text{ e } \inf_{\Gamma} |\nu_\alpha(c, d)| > 0, \quad (1.77)$$

onde ν_α é a função definida pela fórmula (1.74), e, neste caso, a fórmula do índice do operador $T(A, B)$ é

$$\text{ind}T(A, B) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\nu_\alpha(c, d)}{\nu_\alpha(a, b)} \right\}_{\Gamma}.$$

Observação 1.36 A condição de Noether (1.77) pode ser reescrita na seguinte forma. O operador $T(A, B)$ é Noetheriano se e só se forem satisfeitas simultaneamente uma das condições (1) – (2) e uma das condições (3) – (4) abaixo:

- (1) $a \neq 0$ sobre Γ e $|a(\tau_j)| > |b(\tau_j)|$ para qualquer $j \in \{1, \dots, l\}$,
- (2) $b \neq 0$ sobre Γ e $|a(\tau_j)| < |b(\tau_j)|$ para qualquer $j \in \{1, \dots, l\}$,
- (3) $c \neq 0$ sobre Γ e $|c(\tau_j)| > |d(\tau_j)|$ para qualquer $j \in \{1, \dots, l\}$,
- (4) $d \neq 0$ sobre Γ e $|c(\tau_j)| < |d(\tau_j)|$ para qualquer $j \in \{1, \dots, l\}$.

Nos casos em que α é um deslocamento directo com um conjunto finito de pontos periódicos, $\{\tau_i\}_{i=1, \dots, l}$, com multiplicidade $k > 1$, ou um deslocamento directo com um conjunto não vazio arbitrário de pontos periódicos com multiplicidade $k \geq 1$, considerando ν_α a função definida pelas fórmulas (1.75) e (1.76), respectivamente, a teoria de Noether do operador $T(A, B)$ tem sempre a estrutura indicada no seguinte teorema.

Teorema 1.37 *O operador*

$$T(A, B) = (aI + bU)P_+ + (cI + dU)P_- : L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma),$$

com $a, b, c, d \in C(\Gamma)$, $(U\varphi)(t) = |\alpha'(t)|^{\frac{1}{p}} \varphi(\alpha(t))$, é Noetheriano se e só se

$$\inf_{\Gamma} |\nu_\alpha(a, b) \nu_\alpha(c, d)| > 0. \quad (1.78)$$

Sendo satisfeita a condição (1.78), o índice do operador $T(A, B)$ é dado por

$$\text{ind}T(A, B) = \frac{1}{k} \text{Ind}_\Gamma \frac{\nu_\alpha(c, d)}{\nu_\alpha(a, b)}.$$

Continuando a considerar um deslocamento que preserva a orientação, resta-nos estudar o caso em que α não tem pontos periódicos.

Assim, seja α um deslocamento ergódico (da classe \mathcal{M}_3^+), $\Gamma = \mathbb{T}$, e consideremos o operador funcional $A = aI + bW$ ($a, b \in C(\mathbb{T})$) com o deslocamento $\alpha(t) = e^{i\theta}t$ onde $\frac{\theta}{2\pi}$ é um número irracional. Para $x, y \in C(\mathbb{T})$ definimos a seguinte função

$$\mu(x, y) = \begin{cases} x(t) & , \text{ se } \exp \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln |x(t)| |dt| > \exp \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln |y(t)| |dt| \\ y(t) & , \text{ se } \exp \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln |x(t)| |dt| < \exp \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln |y(t)| |dt| \end{cases}, \quad (1.79)$$

convencionando que $\exp(-\infty) = 0$. Então o operador funcional A é invertível se e só se $\inf_{t \in \mathbb{T}} |\mu(a, b)| > 0$.

O teorema seguinte dá-nos as condições de Noether e uma fórmula para o índice do operador $T(A, B)$ no presente caso.

Teorema 1.38 *O operador*

$$T(A, B) = AP_+ + BP_-,$$

com $A = aI + bW$ e $B = cI + dW$, $a, b, c, d \in C(\Gamma)$, $(W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$, e onde o deslocamento α é um deslocamento ergódico (sem pontos periódicos) definido por

$\alpha(t) = e^{i\theta t}$ onde $\frac{\theta}{2\pi}$ é um número irracional, é Noetheriano no espaço $L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, se e só se

$$\inf_{\mathbb{T}} |\mu(a, b) \mu(c, d)| > 0,$$

onde μ é a função definida em (1.79). O índice do operador Noetheriano $T(A, B)$ é determinado pela fórmula

$$\text{ind}T(A, B) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\mu(c, d)}{\mu(a, b)} \right\}_{\mathbb{T}}.$$

Passamos agora ao estudo da teoria de Noether do operador $T(A, B)$ quando o deslocamento α muda a orientação. A teoria de Noether de um operador integral singulares com um deslocamento inverso de Carleman já foi considerada na Subsecção 1.3.1, estudamos agora o caso de um deslocamento inverso da classe \mathcal{M}_2^- .

Assim, passamos a considerar um deslocamento α que muda a orientação, tal que α_2 é um deslocamento directo com um conjunto não vazio arbitrário de pontos fixos, que não coincide com toda a curva Γ . Neste caso a teoria de Noether do operador $T(A, B)$ é dada pelo teorema seguinte.

Teorema 1.39 *Sejam $a, b, c, d \in C(\Gamma)$, $(U\varphi)(t) = |\alpha'(t)|^{\frac{1}{p}} \varphi(\alpha(t))$ e α um deslocamento que muda a orientação sobre a curva Γ . O operador*

$$T(A, B) = (aI + bU)P_+ + (cI + dU)P_- : L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma),$$

é Noetheriano se e só se

$$\inf_{\Gamma} |\nu_{\alpha_2}(a(t)c(\alpha(t)), b(\alpha(t))d(t)) \nu_{\alpha_2}(a(\alpha(t))c(t), b(t)d(\alpha(t)))| > 0,$$

onde a função ν_{α_2} é definida pela fórmula (1.76). O índice do operador Noetheriano $T(A, B)$ é determinado pela fórmula

$$\begin{aligned} \text{ind}T(A, B) = & \frac{1}{2} \{ \text{Ind}_{\Gamma} \nu_{\alpha_2}(a(\alpha(t))c(t), b(t)d(\alpha(t))) \\ & - \text{Ind}_{\Gamma} \nu_{\alpha_2}(a(t)c(\alpha(t)), b(\alpha(t))d(t)) \}. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Problemas de limite de Hilbert e Haseman

Este capítulo será dedicado ao estudo de dois problemas de limite binomiais. Mais concretamente será apresentada a solução de dois problemas que consistem em encontrar uma função analítica que satisfaz uma condição que envolve dois valores limite.

Começamos por considerar, na Secção 2.1, o problema de limite de Hilbert, onde procuramos uma função analítica num domínio simplesmente conexo que satisfaz uma dada condição de limite envolvendo as suas partes real e imaginária. O método que vamos utilizar para resolvê-lo consiste em estender a função incógnita, analítica em D^+ , a uma função seccionalmente analítica, reduzindo depois o problema inicial a um problema de Riemann equivalente para o qual a teoria de resolubilidade foi apresentada na Subsecção 1.2.2. Em seguida observamos que este problema pode ser visto como um caso particular do problema de limite do tipo de Carleman.

Passamos depois, na Secção 2.2, ao estudo do problema de Haseman, que pode ver-se como uma generalização do problema do tipo de Carleman referido, e consiste em encontrar uma função Φ , seccionalmente analítica, cujos valores limite $\Phi^+(\alpha(t))$ e $\Phi^-(t)$, onde α é um deslocamento directo (não necessariamente Carlemaniano), satisfazem uma certa relação. Apresentamos a teoria de resolubilidade completa deste problema. Embora a solução não seja obtida na forma explícita, esta pode ser representada na forma de um integral do tipo de Cauchy cuja densidade é a solução de uma equação canónica de Fredholm. O procedimento que utilizaremos baseia-se na combinação de dois métodos, nomeadamente, o método clássico de equações integrais e o método de colagem conforme. Notamos que este segundo método permitirá estabelecer uma relação directa entre um problema binomial com deslocamento e o mais simples problema binomial - o problema de limite de Riemann. Com efeito, usaremos o método de colagem conforme para reduzir o problema de limite de Haseman sobre uma curva de Lyapunov simples fechada Γ a um problema de limite de Riemann (sem deslocamento) sobre outra curva de Lyapunov simples fechada L .

2.1 Problema de limite de Hilbert

Nesta secção será considerado o problema de limite de Hilbert, o qual consiste em encontrar uma função analítica numa região e cujas partes real e imaginária satisfazem uma dada relação.

Mais precisamente, o problema de limite de Hilbert enuncia-se da seguinte forma: Seja Γ uma curva simples que limita uma região D^+ . Pretende-se encontrar uma função $\Phi^+(z) = u + iv$, analítica em D^+ e contínua em $D^+ \cup \Gamma$, que satisfaz a condição de limite

$$\operatorname{Re}((a + ib)\Phi^+) \equiv au - bv = c \text{ sobre } \Gamma, \quad (2.1)$$

onde a, b, c são funções reais e contínuas definidas em Γ .

Este problema foi mencionado por Riemann na sua dissertação [34] e estudado, mais tarde, por Hilbert [5], [6].

Consideraremos o caso em que $\Gamma = \mathbb{T}$ e, para obter a solução deste problema, utilizaremos o método descrito em [32] que consiste, essencialmente, em reduzi-lo a um problema de limite de Riemann, cuja solução e condições de resolubilidade foram apresentadas na Subsecção 1.2.2.

Antes de mais observamos que, se

$$\Phi_1(z) = u_1 + iv_1, \quad \Phi_2(z) = u_2 + iv_2, \quad \dots, \quad \Phi_k(z) = u_k + iv_k,$$

são soluções do problema homogéneo

$$au - bv = 0 \text{ sobre } \Gamma, \quad (2.2)$$

então qualquer combinação linear

$$\Phi(z) = c_1\Phi_1(z) + c_2\Phi_2(z) + \dots + c_k\Phi_k(z),$$

com coeficientes reais c_1, c_2, \dots, c_k , é ainda uma solução de (2.2). Assim, ao longo desta secção, as combinações lineares serão sempre consideradas com coeficientes reais. Consequentemente, as funções $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_k(z)$ dir-se-ão linearmente independentes se nenhuma das suas combinações lineares com coeficientes reais for nula, excepto quando todos os coeficientes são zero.

Seja \mathbb{T} a circunferência unitária, D^+ o seu interior e D^- o exterior. A condição de limite (2.1) pode escrever-se como

$$2\operatorname{Re}((a + ib)\Phi^+(t)) = (a + ib)\Phi^+(t) + (a - ib)\overline{\Phi^+(t)} = 2c \text{ sobre } \mathbb{T}, \quad (2.3)$$

onde a, b, c são funções reais e contínuas definidas em \mathbb{T} . Assumimos ainda que estas funções satisfazem a condição de Hölder e que

$$a^2 + b^2 \neq 0 \text{ sobre } \mathbb{T}. \quad (2.4)$$

Consideremos agora a extensão da função $\Phi^+(z)$, definindo

$$\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\Phi^+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \text{ para } z \in D^-. \quad (2.5)$$

Observamos que a função

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z) & \text{se } z \in D^+ \\ \Phi^-(z) & \text{se } z \in D^- \end{cases}, \quad (2.6)$$

é uma função seccionalmente analítica, limitada no infinito e satisfaz a seguinte propriedade

$$\overline{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)} = \Phi(z), \text{ para } |z| \neq 1. \quad (2.7)$$

Com esta notação, a condição de limite (2.3), pode escrever-se na forma

$$(a + ib)\Phi^+(t) + (a - ib)\Phi^-(t) = 2c. \quad (2.8)$$

Obtendo-se, assim, um problema de limite de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (2.9)$$

com

$$G(t) = -\frac{a - ib}{a + ib}, \quad g(t) = \frac{2c}{a + ib}. \quad (2.10)$$

Assim, para obter as soluções do problema (2.3), devemos procurar soluções do problema de limite de Riemann correspondente (2.8), que sejam limitadas no infinito e satisfaçam a condição (2.7).

No entanto, observamos que, se $\Phi(z)$ é uma solução do problema de Riemann (2.8) limitada no infinito, podemos usar uma tal função para obter uma solução do problema original (2.3). Com efeito, definindo a função

$$\Phi_*(z) = \begin{cases} \Phi_*^+(z) = \overline{\Phi^-\left(\frac{1}{z}\right)} & \text{se } z \in D^+ \\ \Phi_*^-(z) = \overline{\Phi^+\left(\frac{1}{z}\right)} & \text{se } z \in D^- \end{cases} = \overline{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad (2.11)$$

e passando na equação (2.8) aos conjugados, obtemos

$$(a - ib)\Phi_*^-(t) + (a + ib)\Phi_*^+(t) = 2c,$$

ou seja, se $\Phi(z)$ satisfaz (2.8) então $\Phi_*(z)$ é também uma solução do problema de Riemann (2.8), consequentemente

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}(\Phi(z) + \Phi_*(z)) \quad (2.12)$$

é uma solução do problema original (2.3). Reciprocamente, as soluções do problema (2.8) podem obter-se desta forma. Com efeito, se $\Phi^+(z)$ é uma solução do problema original, então a função estendida definida por (2.5)-(2.6) é uma solução do problema de Riemann (2.8) e (por (2.7))

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) = \frac{1}{2}(\Phi(z) + \Phi_*(z)).$$

Obtemos, em seguida, a solução geral e as condições de resolubilidade do problema de limite de Hilbert.

Começamos por considerar o problema de Hilbert homogéneo obtido de (2.3) para $c \equiv 0$.

Seja κ o índice da função G (ver (2.10)), i.e.,

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{a - ib}{a + ib} \right\}_{\mathbb{T}} = \frac{1}{\pi} \{ \arg(a - ib) \}_{\mathbb{T}} .$$

Notamos, assim, que κ é um número par.

Seja $\chi(z)$ a função canónica do problema de Riemann (2.9). Esta função é dada por

$$\chi(z) = Ce^{\Gamma^+(z)} \text{ para } |z| < 1 \quad ; \quad \chi(z) = Cz^{-\kappa}e^{\Gamma^-(z)} \text{ para } |z| > 1 , \quad (2.13)$$

onde C é uma constante não nula arbitrária e

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\ln(t^{-\kappa}G(\tau))}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\Theta(t)}{t-z} dt , \quad (2.14)$$

onde

$$\Theta(t) = \arg \left[-t^{-\kappa} \frac{a - ib}{a + ib} \right] \quad (2.15)$$

é uma função real, contínua em \mathbb{T} . Pode mostrar-se que

$$\Gamma_*(z) = \overline{\Gamma\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\Theta(t)}{t-z} dt - i\alpha = \Gamma(z) - i\alpha ,$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\Theta(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Theta(t) d\theta , \text{ com } t = e^{i\theta} , \quad (2.16)$$

é uma constante real. Destas expressões podemos concluir que

$$\chi_*(z) = \overline{\chi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \begin{cases} \overline{C} z^{\kappa} e^{\Gamma_*(z)} = \overline{C} e^{-i\alpha} z^{\kappa} e^{\Gamma(z)} & \text{se } z \in D^+ \\ \overline{C} e^{\Gamma_*(z)} = \overline{C} e^{-i\alpha} e^{\Gamma(z)} & \text{se } z \in D^- \end{cases} ,$$

i.e., para $z \notin \mathbb{T}$, $\chi_*(z) = \frac{\overline{C}}{C} e^{-i\alpha} z^{\kappa} \chi(z)$.

Escolhendo

$$C = e^{-\frac{i\alpha}{2}} , \quad (2.17)$$

obtemos uma função canónica $\chi(z)$ com a propriedade

$$\chi_*(z) = z^{\kappa} \chi(z) . \quad (2.18)$$

Estudamos agora, separadamente, os dois casos possíveis: $\kappa \geq 0$ e $\kappa \leq -2$. Para $\kappa \geq 0$ o problema de Riemann homogéneo obtido de (2.8) para $c \equiv 0$, tem soluções não nulas limitadas no infinito todas dadas por

$$\Phi(z) = P(z) \chi(z) , \quad (2.19)$$

onde $P(z) = C_0 z^{\kappa} + C_1 z^{\kappa-1} + \dots + C_{\kappa}$ é um polinómio arbitrário de grau não superior a κ .

Para que (2.19) sejam também soluções do problema homogéneo de Hilbert inicial, é necessário e suficiente que $\Phi_*(z) = \Phi(z)$ (ver (2.11)), i.e., que $\chi_*(z) P_*(z) = \chi(z) P(z)$, ou seja, usando $P_*(z) = \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ e $\chi_*(z) = z^\kappa \chi(z)$, que

$$\begin{aligned} z^\kappa \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) &= \overline{C_0} + \overline{C_1}z + \dots + \overline{C_\kappa} = \\ &= C_0 z^\kappa + C_1 z^{\kappa-1} + \dots + C_\kappa = P(z). \end{aligned}$$

Assim, é necessário e suficiente que

$$C_k = \overline{C_{\kappa-k}}, \quad k = 0, 1, \dots, \kappa. \quad (2.20)$$

Pondo

$$C_k = A_k + iB_k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{\kappa}{2},$$

onde A_k, B_k são números reais e $B_{\frac{\kappa}{2}} = 0$, então

$$C_k = A_{\kappa-k} + iB_{\kappa-k} \quad k = \frac{\kappa}{2} + 1, \dots, \kappa.$$

Obtendo-se, desta forma, $(\kappa + 1)$ constantes reais arbitrárias. Denotando estas constantes, por qualquer ordem, por $D_0, D_1, \dots, D_\kappa$, temos que, para $\kappa \geq 0$ a solução geral do problema homogéneo de Hilbert tem a forma

$$\Phi(z) = D_0 \Phi_0(z) + D_1 \Phi_1(z) + \dots + D_\kappa \Phi_\kappa(z),$$

onde $\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots, \Phi_\kappa(z)$ são soluções particulares linearmente independentes (no sentido indicado no início desta secção) do mesmo problema.

Para $\kappa \leq -2$, o problema de Riemann homogéneo correspondente a (2.8) não tem soluções não nulas e limitadas no infinito. Assim, não existem soluções não nulas do problema de Hilbert homogéneo considerado.

Resumindo, temos os seguintes resultados relativos ao problema de Hilbert homogéneo:

1. Para $\kappa \geq 0$, o problema de Hilbert homogéneo tem exactamente $\kappa + 1$ soluções linearmente independentes, sendo a solução geral dada por

$$\Phi(z) = \chi(z) (C_0 z^\kappa + C_1 z^{\kappa-1} + \dots + C_\kappa),$$

onde $C_0, C_1, \dots, C_\kappa$ são constantes arbitrárias que satisfazem (2.20), $\chi(z)$ é a função canónica do problema de Riemann (2.8), que satisfaz (2.18). Note-se que a função canónica $\chi(z)$ se define univocamente a menos de um factor constante real, e é determinada por (2.13) – (2.15), (2.16), (2.17).

2. Para $\kappa \leq -2$, o problema de Hilbert homogéneo não tem soluções não nulas.

Passamos agora ao estudo do problema não homogéneo (2.3). Para construir a solução geral deste, é suficiente encontrar uma solução particular, visto que a solução geral pode obter-se somando uma solução particular do problema não homogéneo à solução geral do problema homogéneo. Por outro lado, para obter uma solução particular do problema de Hilbert não homogéneo, basta encontrar uma solução

particular do problema de Riemann não homogéneo(2.8), limitada no infinito, uma vez que desta podemos obter uma solução particular do problema de Hilbert usando (2.12). Reciprocamente, sabemos que, se o problema de Hilbert original tem uma solução, então o problema de Riemann correspondente também tem uma solução, limitada no infinito.

Assim, para resolver o problema não homogéneo, podemos usar os resultados relativos ao problema de limite de Riemann apresentados na Subsecção 1.2.2, sujeitos às alterações necessárias devido ao facto de agora não procurarmos soluções que se anulam no infinito, exigindo-se apenas que estas sejam limitadas no infinito.

De acordo com os resultados mencionados, podemos concluir que:

1. Para $\kappa \geq 0$, o problema de Hilbert não homogéneo tem sempre solução, sendo a solução geral dada por uma combinação linear com $(\kappa + 1)$ constantes reais arbitrárias.
2. Para $\kappa \leq -2$, este problema tem solução se e só se forem satisfeitas $-\kappa - 1$ condições de resolubilidade e, neste caso a solução é única.

Consideremos agora com mais atenção as condições de resolubilidade referidas no ponto 2. Estas são essencialmente as condições correspondentes, para este problema, às condições (1.14). Observamos que agora k deve tomar os valores $0, 1, \dots, -\kappa - 2$, pois aqui apenas exigimos que a solução do problema de Riemann seja limitada (mas não necessariamente nula) no infinito. Assim as condições de resolubilidade para este problema tomam a forma

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{t^k c(t)}{[a(t) + ib(t)] \chi^+(t)} dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -\kappa - 2. \quad (2.21)$$

Vamos agora transformar estas condições de forma a obtermos condições de resolubilidade reais. Por (2.14), temos

$$\Gamma^+(t_0) = \frac{i}{2} \Theta(t_0) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Theta(t)}{t - t_0} dt,$$

ou, fazendo $t = e^{i\theta}$, $t_0 = e^{i\theta_0}$,

$$\Gamma^+(t_0) = \frac{i}{2} \Theta(t_0) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Theta(t) \cot \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta + \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Theta(t) d\theta,$$

e assim, observando que o último termo é igual a $\frac{i\alpha}{2}$ por (2.16), que $\chi(z) = Ce^{\Gamma^+(z)}$ para $|z| < 1$ e que

$$e^{i\Theta(t_0)} = -t_0^\kappa \frac{a(t_0) - ib(t_0)}{a(t_0) + ib(t_0)},$$

obtemos

$$\chi^+(t_0) = \pm t_0^{-\frac{\kappa}{2}} \sqrt{-\frac{a(t_0) - ib(t_0)}{a(t_0) + ib(t_0)}} \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Theta(t) \cot \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta \right\}.$$

Substituindo em (2.21) vem

$$\int_0^{2\pi} e^{i(\frac{\kappa}{2}+k)\theta} \Omega(\theta) c(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\kappa - 1, \quad (2.22)$$

onde

$$\Omega(\theta) = \frac{1}{\sqrt{a^2(\theta) + b^2(\theta)}} \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Theta(\theta_1) \cot \frac{\theta_1 - \theta}{2} d\theta_1 \right\}$$

e $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\Theta(t)$ são denotados por $a(\theta)$, $b(\theta)$, $c(\theta)$, $\Theta(\theta)$.

Estas condições são equivalentes às seguintes $(-\kappa - 1)$ condições reais, escritas na forma real

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Omega(\theta) c(\theta) \cos k\theta d\theta &= 0 \quad \left(k = 0, 1, \dots, -\frac{\kappa}{2} - 1 \right), \\ \int_0^{2\pi} \Omega(\theta) c(\theta) \sin k\theta d\theta &= 0 \quad \left(k = 1, \dots, -\frac{\kappa}{2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Acabamos assim de obter o seguinte teorema relativo à teoria de resolubilidade do problema de Hilbert.

Teorema 2.1 *O problema de limite de Hilbert homogéneo ((2.1) com $c \equiv 0$) tem $l = \max(0, \kappa + 1)$ soluções linearmente independentes, onde $\kappa = \frac{1}{\pi} \{ \arg(a - ib) \}_{\mathbb{T}}$. O número de condições de resolubilidade linearmente independentes do problema de Hilbert não homogéneo (2.1) é dado por $\rho = \max(0, -\kappa - 1)$.*

Resta-nos escrever as fórmulas da solução, quando existe, do problema de Hilbert não homogéneo inicial (2.3).

Se $\kappa \leq -2$ e se as condições (2.21) forem satisfeitas, o problema de Riemann (2.8) tem solução única dada por (conforme a fórmula (1.13))

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{c}{(a + ib) \chi^+(t) (t - z)} dt. \quad (2.24)$$

Da unicidade desta solução decorre que $\Phi(z)$ é também uma solução do problema original (2.3). Assim, para $\kappa \leq -2$, se forem satisfeitas as condições necessárias e suficientes (2.22) ou as equivalentes (2.23), então o problema de Hilbert (2.3) tem solução única dada por (2.24).

Para $\kappa \geq 0$, a fórmula

$$\Psi(z) = \frac{\chi(z)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{c}{(a + ib) \chi^+(t) (t - z)} dt$$

dá-nos uma solução particular do problema (2.8). Podemos obter uma solução particular $\Phi(z)$ do problema original (2.3) fazendo, de acordo com (2.12),

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} (\Psi(z) + \Psi_*(z)). \quad (2.25)$$

Procuramos agora uma expressão para a função $\Psi_*(z)$. Pode mostrar-se que, se $\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$, então $\Psi_*(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi(t)}}{t} dt$. Usando este facto, as relações

$$\chi_*(z) = z^\kappa \chi(z), \quad \overline{\chi^+(t)} = \chi_*^-(t) = t^\kappa \chi^-(t),$$

e recordando que, por definição da função canónica $\chi(z)$,

$$(a - ib) \chi^-(t) = -(a + ib) \chi^+(t) ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_*(z) &= \chi_*(z) \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{c}{(a - ib) \chi^+(t) (t - z)} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{c}{(a - ib) \chi^+(t) t} dt \right\} \\ &= z^\kappa \chi(z) \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{t^{-\kappa} c}{(a + ib) \chi^+(t) (t - z)} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{t^{-\kappa} c}{(a + ib) \chi^+(t) t} dt \right\} . \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em (2.25), obtemos a fórmula que nos dá uma solução particular do problema de Hilbert (2.3) para $\kappa \geq 0$,

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\chi(z)}{2\pi i} \left\{ \int_{\mathbb{T}} \frac{c}{(a + ib) \chi^+(t) (t - z)} dt + z^\kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{t^{-\kappa} c}{(a + ib) \chi^+(t) (t - z)} dt \right. \\ &\quad \left. - z^\kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{t^{-\kappa} c}{(a + ib) \chi^+(t) t} dt \right\} . \end{aligned}$$

Observamos que, para $\kappa = 0$ esta fórmula pode ser um pouco simplificada:

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{c}{(a + ib) \chi^+(t) (t - z)} dt - \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{c}{(a + ib) \chi^+(t) t} dt .$$

As provas e pormenores omitidos na exposição que acabamos de apresentar podem encontrar-se em [32].

Procuramos agora realçar e mostrar que o problema que acabamos de resolver se trata de um caso particular de um problema mais geral, conhecido por problema de limite do tipo de Carleman, que passamos a enunciar:

Encontre uma função $\Phi^+(z)$ analítica num domínio D^+ , limitado por uma curva simples fechada de Lyapunov Γ , e que satisfaz a condição de Hölder em $D^+ \cup \Gamma$ e a seguinte condição de limite sobre Γ

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t) \overline{\Phi^+(t)} + g(t) , \quad (2.26)$$

onde α é um deslocamento directo de Carleman tal que $\alpha_+(\alpha_+(t)) \equiv t$ e $G, g, \alpha' \in H_\mu(\Gamma)$, $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Aos coeficientes G e g impomos ainda que satisfaçam, sobre Γ , as condições adicionais

$$\begin{aligned} G(\alpha(t)) \overline{G(t)} &= 1 \\ G(\alpha(t)) \overline{g(t)} + g(\alpha(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Este problema foi resolvido para qualquer domínio simplesmente conexo nos trabalhos de Khasabov, E. G. [9] e Khasabov, E. G., Litvinchuk, G. S. [11], [12].

Vejam agora que, no caso em que $\Gamma = \mathbb{T}$, o problema de limite de Hilbert pode considerar-se como um caso particular do problema de limite do tipo de Carleman. Com efeito, uma vez que assumimos a condição (2.4), a condição de limite (2.3) do problema de Hilbert pode reescrever-se na forma

$$\Phi^+(t) = -\frac{(a - ib)}{(a + ib)} \overline{\Phi^+(t)} + \frac{2c}{(a + ib)}$$

que coincide com a condição de limite (2.26) para $\alpha(t) \equiv t$ e

$$G(t) = -\frac{a - ib}{a + ib}, \quad g(t) = \frac{2c}{a + ib}.$$

Verifica-se imediatamente que os coeficientes G e g satisfazem sobre Γ as condições

$$\begin{aligned} |G(t)| &= 1 \\ G(t)g(t) + g(t) &= 0 \end{aligned}$$

que são precisamente as condições (2.27) para $\alpha(t) \equiv t$.

Por outro lado, continuando a considerar o caso em que $\Gamma = \mathbb{T}$, um raciocínio análogo ao que foi utilizado para reduzir o problema de Hilbert (2.3) ao problema de Riemann (2.8) permite-nos reescrever a condição de limite (2.26) na forma

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),$$

sendo esta a condição de limite correspondente ao problema de limite de Haseman que será estudado na secção seguinte. No entanto, salientamos desde já que este problema pode ser visto como uma generalização do problema do tipo de Carleman, uma vez que, como veremos, no enunciado do problema de Haseman não são impostas aos coeficientes G e g as condições adicionais (2.27) e não se exige que o deslocamento directo α seja Carlemaniano.

2.2 Problema de limite de Haseman

Esta secção será dedicada ao estudo do problema de limite de Haseman:

Seja Γ uma curva simples fechada de Lyapunov que divide o plano complexo estendido \mathbb{C} em duas componentes conexas D^+ e D^- . Encontre uma função seccionalmente analítica em \mathbb{C} que satisfaz sobre Γ a condição de limite

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{2.28}$$

com $G, g \in H_\mu(\Gamma)$ funções dadas tais que $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, e α é um deslocamento directo sobre Γ que satisfaz $\alpha' \in H_\mu(\Gamma)$ e $\alpha' \neq 0$ sobre Γ .

Este problema foi introduzido por C. Haseman [4] tendo a sua solução sido obtida por D. A. Kveselava [21][22] pelo método de equações integrais. Aqui expomos a solução deste problema pelo processo apresentado em [26] que consiste na combinação do método de equações integrais com o método de colagem conforme.

Assim, este estudo será realizado em dois passos. Primeiro, usamos o método de equações integrais para construir a solução do problema de Haseman não homogéneo mais simples, o assim chamado *problema do salto*

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) = g(t),$$

depois passamos ao método de colagem conforme que consiste, essencialmente, em reduzir o problema (2.28) sobre uma curva de Lyapunov simples fechada Γ a um problema de limite de Riemann sobre outra curva de Lyapunov simples fechada L . Esta redução obtém-se construindo transformações conformes especiais (*funções*

colantes) $\omega^+ : D^+ \rightarrow \Delta^+$ e $\omega^- : D^- \rightarrow \Delta^-$, onde (D^+, D^-) e (Δ^+, Δ^-) são as componentes conexas nas quais as curvas Γ e L dividem o plano complexo estendido \mathbb{C} , respectivamente. O método de colagem conforme foi originalmente considerado por B. Khvedelidze e G. Mandjavidze [14], no entanto aqui apresentaremos este método na forma obtida, mais tarde, por I. Simonenko [36].

Começamos o estudo do problema (2.28) pela consideração do problema homogéneo mais simples

$$\Phi^+(\alpha(t)) = \Phi^-(t) . \quad (2.29)$$

Lema 2.2 *O problema de limite (2.29) com a condição adicional $\Phi^-(\infty) = 0$ não tem soluções não triviais.*

Prova. De acordo com as propriedades das projecções $P_+ = \frac{1}{2}(I + S)$ e $P_- = \frac{1}{2}(I - S)$, sendo $\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ uma solução do problema (2.29), satisfazem-se as igualdades

$$(P_- \Phi^+)(t) \equiv \frac{1}{2} \Phi^+(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0 \quad (2.30)$$

$$(P_+ \Phi^-)(t) \equiv \frac{1}{2} \Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0 . \quad (2.31)$$

Fazendo a substituição $t \mapsto \alpha(t)$ e $\tau \mapsto \alpha(\tau)$ em (2.30), obtemos

$$\frac{1}{2} \Phi^+(\alpha(t)) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \Phi^+(\alpha(\tau)) d\tau = 0 . \quad (2.32)$$

Usando a condição de limite (2.29), de (2.32) resulta

$$\frac{1}{2} \Phi^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \Phi^-(\tau) d\tau = 0 . \quad (2.33)$$

Somando (2.31) e (2.33) obtemos a equação integral

$$\Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right) \Phi^-(\tau) d\tau = 0 , \quad (2.34)$$

que, pelo Teorema 1.6, é uma equação canónica de Fredholm. Assim, a equação (2.34) tem um número finito de soluções linearmente independentes. Uma vez que os valores limite de uma solução do problema (2.29) satisfazem a equação (2.34), o problema de limite (2.29) também tem um número finito de soluções linearmente independentes. Resta observar que, por um lado o problema (2.29) não pode ter soluções não constantes, pois, se houvesse uma solução não constante, qualquer potência dessa solução seria também uma solução e obteríamos dessa forma um conjunto numerável de soluções linearmente independentes o que contrariaria o facto de que o problema (2.29) tem um número finito de soluções linearmente independentes. Por outro lado, se uma constante é solução do problema de limite (2.29), da condição $\Phi^-(\infty) = 0$ decorre que essa constante é igual a zero. ■

Lema 2.3 *A equação integral homogénea de Fredholm*

$$(\mathcal{L}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right) \varphi(\tau) d\tau = 0 \quad (2.35)$$

não tem soluções não triviais e a equação não-homogénea correspondente $\mathcal{L}\varphi = f$ resolve-se incondicionalmente e tem solução única.

Prova. Seja $\varphi(t)$ uma solução da equação integral (2.35). Consideremos os integrais do tipo de Cauchy

$$\begin{aligned}\Phi^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau))}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^+, \\ \Phi^-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^-, \end{aligned}$$

onde α_{-1} é a função inversa de α . Notamos que $\Phi^-(\infty) = 0$. Usando as fórmulas de Sokhotsky-Plemeli (1.1), obtemos

$$(\mathcal{L}\varphi)(t) \equiv \Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t).$$

Visto que $\varphi(t)$ é uma solução da equação (2.35), temos

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) = 0.$$

Consequentemente, de acordo com o Lema 2.2, $\Phi^+(z) = \Phi^-(z) = 0$. Assim

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau))}{\tau - z} d\tau &\equiv 0, \quad z \in D^+, \\ \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau &\equiv 0, \quad z \in D^-. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Das igualdades (2.36) e das fórmulas de Sokhotsky-Plemeli concluímos que a função $\varphi(\alpha_{-1}(t))$ é o valor limite de uma função $\Psi^-(z)$ analítica em D^- , que se anula em $z = \infty$, e $\varphi(t)$ é o valor limite de uma função $\Psi^+(z)$ analítica em D^+ , i.e.

$$\varphi(\alpha_{-1}(t)) = \Psi^-(t) \quad , \quad \varphi(t) = \Psi^+(t) \quad , \quad \Psi^-(\infty) = 0. \tag{2.37}$$

De (2.37) obtemos o problema de limite

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(\alpha(t)) \quad , \quad \Psi^-(\infty) = 0. \tag{2.38}$$

Aplicando o Lema 2.2 ao problema (2.38), obtemos

$$\Psi^+(z) \equiv \Psi^-(z) \equiv 0 \quad \text{e} \quad \varphi(t) \equiv 0.$$

Usando a alternativa de Fredholm (ver Subsecção 1.2.1), concluímos que a equação não-homogénea correspondente $\mathcal{L}\varphi = f$ resolve-se incondicionalmente e tem solução única. ■

Obtemos agora uma representação integral especial para uma função seccionalmente analítica.

Teorema 2.4 *Seja α um deslocamento directo sobre Γ que satisfaz $\alpha' \in H_{\mu}(\Gamma)$ e $\alpha' \neq 0$ sobre Γ , cuja função inversa é α_{-1} . Para qualquer função $\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ seccionalmente analítica no plano complexo \mathbb{C} , que se anula no ponto $z = \infty$, com valores limite em Γ dados por $\Phi^+(t), \Phi^-(t) \in H_{\mu}(\Gamma)$, existe uma única função $\varphi \in H_{\mu}(\Gamma)$ tal que se verifica a seguinte representação integral*

$$\begin{aligned}\Phi^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\alpha_{-1}(\tau))}{\tau - z} d\tau \quad , \quad z \in D^+, \\ \Phi^-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad , \quad z \in D^-. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Prova. Usando as fórmulas de Sokhotsky-Plemeli para avaliar os valores limite, $\Phi^+(\alpha(t))$ e $\Phi^-(t)$, dos integrais do tipo de Cauchy (2.39), obtemos a equação integral de Fredholm

$$(\mathcal{L}\varphi)(t) \equiv \Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) . \quad (2.40)$$

Decorre do Lema 2.3 que a equação integral (2.40) resolve-se incondicionalmente e tem uma única solução φ . ■

Teorema 2.5 (Solução do problema do salto) *A única função seccionalmente analítica que se anula no infinito e é solução do problema de limite*

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) = g(t) \quad (2.41)$$

é dada pelas fórmulas

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\alpha^{-1}(\tau))}{\tau - z} d\tau , \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau , \quad (2.42)$$

onde $\varphi(t)$ é a solução da equação integral de Fredholm

$$(\mathcal{L}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right) \varphi(\tau) d\tau = g(t) \quad (2.43)$$

que se resolve incondicionalmente e tem solução única.

Prova. De acordo com o Teorema 2.4, qualquer solução do problema de limite (2.41) pode ser representada na forma (2.42). Calculando os valores limite $\Phi^+(\alpha(t))$ e $\Phi^-(t)$ dos integrais do tipo de Cauchy (2.42) e substituindo-os na condição de limite (2.41), obtemos a equação (2.43) da qual a densidade $\varphi(t)$ da representação integral (2.42) é determinada incondicional e univocamente para qualquer função $g \in H_{\mu}(\Gamma)$. ■

Usando a solução do problema do salto, é possível estudar completamente a resolubilidade do problema de limite de Haseman homogéneo

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t) \Phi^-(t) \quad (2.44)$$

no caso em que $\{\arg G(t)\}_{\Gamma} = 0$. No seguimento vamos necessitar deste resultado para provar um teorema de colagem conforme.

Teorema 2.6 *O problema de limite de Haseman homogéneo (2.44) com $\{\arg G(t)\}_{\Gamma} = 0$ tem uma única solução na classe das funções seccionalmente analíticas que satisfazem a condição $\Phi^-(\infty) = 1$, e este problema não tem soluções não triviais que se anulem no infinito.*

Prova. Consideremos o problema de limite (2.44) e suponhamos que $\kappa = \frac{1}{2\pi i} \{\arg G(t)\}_{\Gamma} = 0$. Procuramos uma solução do problema (2.44) que satisfaça a condição $\Phi^-(\infty) = 1$. Uma vez que $\kappa = 0$ aplicando o logaritmo a cada um dos membros da condição (2.44), obtemos o problema do salto

$$\Gamma^+(\alpha(t)) - \Gamma^-(t) = \ln G(t) \quad (2.45)$$

onde $\Gamma^+(z) = \ln \Phi^+(z)$, $\Gamma^-(z) = \ln \Phi^-(z)$.

Devido à condição $\Phi^-(\infty) = 1$, consideramos o problema de limite (2.45) na classe das funções seccionalmente analíticas satisfazendo a condição $\ln \Phi^-(\infty) = \Gamma^-(\infty) = 0$. Consequentemente, pelo Teorema 2.5, existe uma única solução

$$\left\{ \Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} \right\}$$

do problema de limite (2.44) que satisfaz a condição $\Phi^-(\infty) = 1$. A solução geral do problema (2.44), na classe das funções seccionalmente analíticas limitadas no infinito, tem a forma

$$\left\{ ce^{\Gamma^+(z)}, ce^{\Gamma^-(z)} \right\},$$

onde c é uma constante complexa arbitrária. Se impusermos a condição adicional $\Phi^-(\infty) = 0$, então $c = 0$ e, nesse caso, o problema de limite (2.44) tem apenas a solução trivial na classe das funções seccionalmente analíticas que se anulam no infinito. ■

Passamos agora ao já mencionado método de colagem conforme. Vamos mostrar que, dada uma curva de Lyapunov Γ que divide o plano complexo \mathbb{C} nos domínios D^+ e D^- , existem transformações conformes, $\omega^+ : D^+ \rightarrow \Delta^+$ e $\omega^- : D^- \rightarrow \Delta^-$, que transformam, os domínios D^+ e D^- nos domínios Δ^+ e Δ^- , respectivamente, nos quais uma curva de Lyapunov L divide o plano complexo \mathbb{C} , de forma que as imagens do ponto $\alpha(t)$ pela transformação ω^+ e do ponto t pela transformação ω^- são *coladas* no mesmo ponto da nova curva L . Usando estas transformações e uma mudança de variáveis, é possível eliminar o deslocamento α da condição de limite (2.28) e, dessa forma, transformar o problema de Haseman sobre Γ num problema de Riemann sobre L .

A imposição de que as imagens dos ponto t e $\alpha(t)$ coincidam significa que os valores limite sobre Γ das funções $\omega^+(z)$ e $\omega^-(z)$ satisfaçam a *condição de colagem*

$$\omega^+(\alpha(t)) = \omega^-(t) . \tag{2.46}$$

A função ω^- tem necessariamente um polo no domínio D^- , pois, caso contrário, de acordo com o Lema 2.2, ω^- seria constante em D^- e assim não satisfaria a propriedade necessária. Como a transformação $\omega^- : D^- \rightarrow \Delta^-$ tem de ser biunívoca, o polo mencionado é simples. Assim $\omega^-(z)$ tem a forma

$$\omega^-(z) = z + \tilde{\omega}^-(z) , \tag{2.47}$$

onde $\tilde{\omega}^-(z)$ é uma função analítica em D^- que se anula no infinito. Tendo em conta a igualdade (2.47), obtemos que o problema de limite (2.46) é equivalente ao problema do salto

$$\omega^+(\alpha(t)) - \tilde{\omega}^-(t) = t \quad , \quad t \in \Gamma , \tag{2.48}$$

para o qual procuramos uma função seccionalmente analítica $\{\omega^+(z), \tilde{\omega}^-(z)\}$ com a condição $\tilde{\omega}^-(\infty) = 0$. Pelo Teorema 2.5 o problema de limite (2.48) tem solução única, a qual se representa pelas fórmulas (2.42), onde φ satisfaz a equação $(\mathcal{L}\varphi)(t) = t$. Assim, as *funções de colagem* ω^+ e ω^- determinam-se univocamente de (2.46) e (2.47).

Agora transformamos o problema de Haseman (2.28) sobre Γ num problema de Riemann sobre L . Seja $t = \omega_{-1}^{-1}(v)$ a função inversa de $v = \omega^{-}(t)$, i.e., $\omega^{-}(\omega_{-1}^{-1}(v)) \equiv v$, com $v \in L$ e $\omega_{-1}^{-1}(\omega^{-}(t)) \equiv t$, com $t \in \Gamma$.

Substituindo t por $\omega_{-1}^{-1}(v)$ na condição de limite (2.46), obtemos

$$\omega^{+}[\alpha(\omega_{-1}^{-1}(v))] \equiv v. \quad (2.49)$$

Introduzindo a função seccionalmente analítica $\{\Phi_1^{+}, \Phi_1^{-}\}$ definida por

$$\Phi^{+}(z) = \Phi_1^{+}[\omega^{+}(z)] \quad , \quad \Phi^{-}(z) = \Phi_1^{-}[\omega^{-}(z)] \quad ,$$

a condição de limite do problema de Haseman (2.28) toma a forma

$$\Phi_1^{+}\{\omega^{+}(\alpha(t))\} = G(t)\Phi_1^{-}(\omega^{-}(t)) + g(t) \quad , \quad t \in \Gamma.$$

Fazendo a substituição $t = \omega_{-1}^{-1}(v)$, i.e., passando da curva Γ à curva L , obtemos

$$\Phi_1^{+}\{\omega^{+}[\alpha(\omega_{-1}^{-1}(v))]\} = G(\omega_{-1}^{-1}(v))\Phi_1^{-}(v) + g(\omega_{-1}^{-1}(v)) \quad , \quad v \in L.$$

Usando a identidade (2.49), obtemos o problema de limite de Riemann na nova curva L

$$\Phi_1^{+}(v) = G(\omega_{-1}^{-1}(v))\Phi_1^{-}(v) + g(\omega_{-1}^{-1}(v)) \quad , \quad v \in L. \quad (2.50)$$

Resta provar que as transformações $\omega^{+} : D^{+} \rightarrow \Delta^{+}$ e $\omega^{-} : D^{-} \rightarrow \Delta^{-}$ satisfazem as condições mencionadas.

Teorema 2.7 (Sobre colagem conforme) *As funções ω^{+} e ω^{-} , que são soluções do problema de limite (2.46) na classe (2.47), transformam biunivocamente os domínios D^{+} e D^{-} nos domínios Δ^{+} e Δ^{-} , respectivamente. Os domínios Δ^{+} e Δ^{-} são limitados pelos contornos L_{+} e L_{-} , respectivamente, e estes domínios Δ^{+} e Δ^{-} não se intersectam e estão separados pela curva de Lyapunov comum $L_{+} = L_{-} = L$ sendo $\Delta^{+} \cup \Delta^{-} \cup L = \mathbb{C}$ (plano complexo estendido).*

Prova. A prova deste teorema será dividida nos seguintes cinco passos:

1. Provamos que as fronteiras dos domínios D^{+} e D^{-} coincidem, i.e., $L_{+} = L_{-}$. Seja $v \in L_{+}$. Então existe um ponto $t \in \Gamma$ tal que $\omega^{+}(t) = v$. Da igualdade $\omega^{+}(t) = \omega^{-}(\alpha_{-1}(t))$, obtemos que $\omega^{-}(\alpha_{-1}(t)) = v$. Consequentemente $v \in L_{-}$. Assim $L_{+} \subset L_{-}$. A inclusão contrária $L_{-} \subset L_{+}$ prova-se de forma análoga. Portanto $L_{+} = L_{-}$.
2. Provamos que os valores limite $\omega^{+}(t)$ e $\omega^{-}(t)$ da solução do problema de limite (2.46) tem derivadas (em ordem a t) pertencentes à classe $H_{\mu}(\Gamma)$. Para mostrar isto consideramos o problema de Haseman

$$\alpha'(t)\gamma^{+}(\alpha(t)) = \gamma^{-}(t) \quad . \quad (2.51)$$

A solução do problema inicial (2.46) pode ser obtida integrando a solução do problema (2.51), assim, passamos agora à resolução do problema (2.51). Da condição (2.47) decorre que temos de encontrar a solução do problema (2.51)

com a condição adicional $\gamma^-(\infty) = 1$. Da primeira fórmula em (1.3), obtemos que

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{1}{\alpha'(t)} \right\}_{\Gamma} = 0 .$$

Assim, pelo Teorema 2.6, o problema de limite (2.51) tem uma única solução (não nula) seccionalmente analítica satisfazendo a condição $\gamma^-(\infty) = 1$. A solução $\{\gamma^+(z), \gamma^-(z)\}$ pode ser expressa usando integrais do tipo de Cauchy com densidades da classe $H_{\mu}(\Gamma)$. Consequentemente (ver Teorema 1.2) $\gamma^{\pm}(t) \in H_{\mu}(\Gamma)$ (ou $\gamma^{\pm}(t) \in H_{1-\varepsilon}(\Gamma)$ se $\mu = 1$).

Agora consideramos a função

$$\omega_0(z) = \begin{cases} \int_{\alpha(t_0)}^z \gamma(z) dz & , z \in D^+ \\ \int_{t_0}^z \gamma(z) dz & , z \in D^- \end{cases} ,$$

onde t_0 é um ponto arbitrário da curva Γ . Verificamos que a função $\omega_0(z)$ satisfaz a condição de limite $\omega_0^+(\alpha(t)) = \omega_0^-(t)$. Com efeito,

$$\omega_0^+(\alpha(t)) = \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} \gamma^+(z) dz = \int_{t_0}^t \gamma^+(\alpha(u)) \alpha'(u) du = \int_{t_0}^t \gamma^-(u) du = \omega_0^-(t) .$$

Além disso, o desenvolvimeneto da função $\omega_0^-(z)$ numa vizinhança do ponto $z = \infty$ tem a forma

$$\omega_0^-(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots . \tag{2.52}$$

De facto, integrando a igualdade (2.51) sobre Γ e usando o Teorema integral de Cauchy, obtemos

$$-2\pi i \text{Res} \gamma^-(z) |_{z=\infty} = \int_{\Gamma} \gamma^-(t) dt = \int_{\Gamma} \alpha'(t) \gamma^+(\alpha(t)) dt = \int_{\Gamma} \gamma^+(\xi) d\xi = 0 .$$

Portanto $\text{Res} \gamma^-(z) |_{z=\infty} = 0$ e o desenvolvimento de $\gamma(z)$ no ponto $z = \infty$ tem a forma

$$\gamma^-(z) = 1 + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots ,$$

e a fórmula (2.52) é válida.

Seja $W^{\pm}(z) = \omega^{\pm}(z) - \omega_0^{\pm}(z)$, onde $\omega_0^{\pm}(z)$ é a solução do problema de limite (2.46) na classe das funções que satisfazem (2.47). Então as funções $W^{\pm}(z)$ satisfazem a condição de limite

$$W^+(\alpha(t)) = W^-(t)$$

e W^- é limitada no infinito. Pelo Lema 2.2, temos que $W^{\pm}(z) \equiv \text{const}$, i.e. $\omega^{\pm}(z) = \omega_0^{\pm}(z) + \text{const}$. Diferenciando estas igualdades, obtemos

$$\frac{d\omega^{\pm}(t)}{dt} = \gamma^{\pm}(t) \quad , \quad t \in \Gamma .$$

Portanto $\frac{d\omega^{\pm}(t)}{dt} \in H_{\mu}(\Gamma)$.

3. Provamos que se $t_1, t_2 \in \Gamma$ e $t_1 \neq t_2$, então $\omega^-(t_1) \neq \omega^-(t_2)$. Por outras palavras, a curva L é uma curva simples de Jordan que divide o plano complexo \mathbb{C} em dois domínios Δ^+ e Δ^- . Suponhamos o contrário, i.e. $\omega^-(t_1) = \omega^-(t_2) = v_0$ para $t_1 \neq t_2$, e consideremos as funções $\omega_1^\pm(z) = \omega^\pm(z) - v_0$.

As funções ω_1^\pm satisfazem a condição de limite (2.46) e temos

$$\omega_1^-(t_1) = \omega_1^-(t_2) = \omega_1^+(\alpha(t_1)) = \omega_1^+(\alpha(t_2)) = 0. \quad (2.53)$$

Reescrevemos agora a condição de limite (2.46) na forma

$$\frac{[\alpha(t) - \alpha(t_1)][\alpha(t) - \alpha(t_2)]}{(t - t_1)(t - t_2)} \cdot \frac{\omega_1^+(\alpha(t))}{[\alpha(t) - \alpha(t_1)][\alpha(t) - \alpha(t_2)]} = \frac{\omega_1^-(t)}{(t - t_1)(t - t_2)}$$

e introduzimos a função

$$\omega_2^+(z) = \frac{\omega_1^+(z)}{[z - \alpha(t_1)][z - \alpha(t_2)]}, \quad \omega_2^-(z) = \frac{\omega_1^-(z)}{(z - t_1)(z - t_2)}.$$

Como as condições (2.53) são satisfeitas e, de acordo com o passo 2, $\frac{d\omega^\pm(t)}{dt} \in H_\mu(\Gamma)$, concluímos que $\omega_2^\pm(t) \in H_\mu(\Gamma)$. Além disso verifica-se a condição de limite

$$\omega_2^+(\alpha(t)) = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{[\alpha(t) - \alpha(t_1)][\alpha(t) - \alpha(t_2)]} \omega_2^-(t). \quad (2.54)$$

Observando que o coeficiente do problema de Haseman (2.54) tem índice zero e que $\omega_2^-(\infty) = 0$, podemos aplicar o Teorema 2.6 e obtemos que o problema homogéneo (2.54) tem apenas a solução trivial $\omega_2^\pm(z) \equiv 0$. Assim, $\omega^\pm(z) = v_0 = \text{const.}$ No entanto esta igualdade não é possível porque a função $\omega_2^-(z)$ tem um polo (simples) no ponto $z = \infty$. Chegamos a uma contradição, consequentemente

$$\omega^-(t_1) \neq \omega^-(t_2) \quad \text{se } t_1, t_2 \in \Gamma \text{ com } t_1 \neq t_2.$$

4. A correspondência biunívoca entre os domínios D^+ e Δ^+ e entre os domínios D^- e Δ^- decorre do princípio de correspondência de fronteiras por uma transformação conforme (ver, por exemplo [23], Cap. 2, pág. 105). De acordo com o princípio mencionado, para que a correspondência entre os domínios seja biunívoca, é suficiente que se a correspondência entre as fronteiras o seja, e isso foi verificado no passo 3.
5. Resta provar que a curva L é uma curva de Lyapunov. Designamos por s e σ as abcissas de arco dos pontos $t \in \Gamma$ e $v \in L$ correspondentes um ao outro, respectivamente. Então

$$\sigma = \sigma(s) = \int_{s_0}^s |v'_t(t(s))| ds.$$

Daqui decorre que a função $\sigma(s)$ é estritamente crescente e existe a função inversa $s = s(\sigma)$ também estritamente crescente. Temos ainda que

$$|\sigma_2 - \sigma_1| = |\sigma(s_2) - \sigma(s_1)| = \left| \int_{s_1}^{s_2} |v'_t(t(s))| ds \right| \geq m |s_2 - s_1|,$$

onde $m = \min \{|v'_t(t(s))| : s \in [s_1, s_2]\}$. Notamos que $m \neq 0$ porque a solução do problema (2.51) nunca se anula sobre Γ . Assim,

$$|s(\sigma_2) - s(\sigma_1)| \leq \frac{1}{m} |\sigma_2 - \sigma_1|. \quad (2.55)$$

O que significa que a função $s(\sigma)$ satisfaz a condição de Hölder com expoente $\mu = 1$. Agora consideramos a derivada $v'_\sigma = \frac{dv(t(s(\sigma)))}{d\sigma}$. Temos

$$v'_\sigma = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \frac{dt(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = t'(s) \frac{v'(t)}{|v'(t)|} = t'(s) e^{i \arg v'(t)}. \quad (2.56)$$

O segundo factor do segundo membro da fórmula (2.56) satisfaz a condição de Hölder. Com efeito, de acordo com (2.55), a função $\sigma(s)$ é uma função de Hölder que assume valores reais. Como a função $t(s)$ tem a derivada limitada, a função $t(s(\sigma))$ satisfaz a condição de Hölder. Além disso já provamos que $v'(t) \in H_\mu(\Gamma)$.

Por fim, visto que Γ é uma curva de Lyapunov, a função $t'(s(\sigma))$ também pertence à classe de Hölder.

Assim a derivada v'_σ satisfaz a condição de Hölder em relação a σ , o que significa que a nova curva L pertence à classe das curvas de Lyapunov.

■

O Teorema 2.7, que acabamos de demonstrar, fundamenta a redução do problema de limite de Haseman (2.28) ao problema de limite de Riemann (2.50). Usando a teoria de resolubilidade do problema de limite de Riemann, que foi apresentada na Subsecção 1.2.2, obtemos o seguinte teorema sobre a resolubilidade do problema de limite de Haseman.

Teorema 2.8 *O problema de Haseman homogéneo (2.44) na classe das funções seccionalmente analíticas que se anulam no infinito tem $l = \max(0, \kappa)$ soluções linearmente independentes, onde $\kappa = \frac{1}{2\pi} \{\arg G(t)\}_\Gamma$. O número de condições de resolubilidade linearmente independentes do problema de Haseman não homogéneo correspondente é dado por $\rho = \max(0, -\kappa)$.*

Relativamente às soluções, estas podem ser obtidas na forma explícita se as transformações conformes $\omega^+ : D^+ \rightarrow \Delta^+$ e $\omega^- : D^- \rightarrow \Delta^-$ forem conhecidas. Como vimos, o problema de construção de ω^+ e ω^- é, em certo sentido, equivalente à resolução de uma equação canónica de Fredholm. Assim, nenhum dos métodos (o método de equações integrais ou o método de colagem conforme) tem vantagem sobre o outro quando se pretende resolver efectivamente o problema de Haseman. O problema de Haseman é solúvel na forma explícita se a equação integral de Fredholm $(\mathcal{L}\varphi)(t) = t$ admitir uma tal solução.

Terminamos esta secção apresentando uma interpretação geométrica das *colagens* efectuadas para a redução do problema de Haseman a um problema de Riemann. É conveniente considerar a curva Γ como sendo dada na esfera de Riemann, a qual é homeomorfa ao plano complexo estendido. Então o Teorema 2.7 de colagem conforme pode ser interpretado da seguinte forma. Recortamos e retiramos o domínio D^+ da esfera de Riemann e, depois de algumas deformações de D^+ e D^- sem ‘dobras’ ou ‘quebras’, voltamos a fechar a abertura com a parte alterada Δ^+ de forma que o ponto t na berma externa do corte seja *colado* no ponto $\alpha(t)$ da berma interna.

Capítulo 3

Teoria de Noether e teoria de resolubilidade do problema de limite de Hilbert Generalizado

Neste capítulo estudamos o *problema de limite de Hilbert generalizado*, que pode ser enunciado da seguinte forma:

Seja Γ uma curva simples fechada de Lyapunov que divide o plano complexo \mathbb{C} em duas partes D^+ e D^- . Encontre uma função

$$\Phi^+(z) = u(x, y) + iv(x, y) \ , \ z = x + iy \ ,$$

analítica no domínio D^+ tal que os valores limite das partes real e imaginária de $\Phi^+(z)$ pertencem a $H_\mu(\Gamma)$ e satisfazem sobre Γ a condição

$$a(t)u(t) + b(t)u(\alpha(t)) + c(t)v(t) + d(t)v(\alpha(t)) = h(t) \ , \quad (3.1)$$

onde $a, b, c, d, h \in H_\mu(\Gamma)$ são funções reais, α é um deslocamento que preserva ou muda a orientação sobre Γ e satisfaz $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ e $\alpha' \in H_\mu(\Gamma)$.

A condição de limite (3.1) pode reescrever-se na forma

$$\operatorname{Re} \{ \mathcal{A}(t) \Phi^+(t) + \mathcal{B}(t) \Phi^+(\alpha(t)) \} = h(t) \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{A}(t) = a(t) - ic(t)$, $\mathcal{B}(t) = b(t) - id(t)$.

Notemos que, se $b = d = 0$, obtemos o *problema de limite de Hilbert clássico*, que foi considerado na Secção 2.1.

O problema (3.1) (ou (3.2)) foi formulado por E. G. Khasabov e G. S. Litvinchuk em [10]. Nos artigos [10] e [13], destes autores, foram encontradas as condições de Noether, obtida a fórmula do índice e estabelecidas as condições de resolubilidade do problema (3.1) com um deslocamento Carlemaniano de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) = t$), preservando ou mudando a orientação sobre Γ . Além disso, em [10] foi apresentada a teoria de resolubilidade de alguns casos particulares degenerados deste problema que podem ser reduzidos a problemas de limite binomiais e em [13] foram considerados exemplos do problema de limite de Hilbert generalizado para os quais, em geral, os números de defeito, l e ρ , não satisfazem as fórmulas de Gakhov-Coburn (III).

Na Secção 3.1 construímos a teoria de Noether do problema (3.1). Para isso usaremos uma representação da função $\Phi^+(z)$ na forma de um integral do tipo de

Cauchy com uma densidade real, uma vez que esta representação permitirá reduzir a condição de limite (3.2) a uma equação integral singular com deslocamento. Começamos por considerar o caso em que α é um deslocamento de Carleman tal que $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ para obtermos a teoria de Noether desta equação pelo método matricial (usando o Teorema 1.20). No entanto apresentamos também a teoria de Noether do problema de Hilbert generalizado nos casos em que α é um deslocamento não Carlemaniano ou um deslocamento directo de Carleman de ordem $k \geq 2$, para isso usaremos os resultados expostos na Secção 1.5.

A Secção 3.2 será dedicada à teoria de resolubilidade deste mesmo problema. Neste contexto procuramos, essencialmente, obter os números de defeito l e ρ do problema (3.2). Começamos por apresentar os casos particulares degenerados que foram considerados em [10]. Depois consideramos o caso em que $\Gamma = \mathbb{T}$ e a é um deslocamento linear fraccionário de Carleman de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$), reduzimos o estudo da teoria de resolubilidade do referido problema ao estudo da teoria de resolubilidade de um operador integral singular sem deslocamento com coeficientes matriciais e aplicamos os resultados apresentados nas secções 1.3 e 1.4. Ainda nesta secção consideramos, por outro método, os exemplos apresentados em [13] que foram referidos acima.

3.1 Teoria de Noether

Esta secção consiste, essencialmente, de duas partes. Na primeira parte usamos o método descrito em [26] (Sec. 23) para obter as condições de Noether e uma fórmula para o índice e encontrar as condições de resolubilidade do problema (3.1) com um deslocamento de Carleman de ordem 2 à custa do problema de limite aliado. Na segunda parte baseamo-nos nos resultados apresentados na Secção 1.5 para obter a teoria de Noether do problema de limite de Hilbert generalizado com um deslocamento não Carlemaniano ou com um deslocamento de Carleman de ordem arbitrária.

Assim, começamos por introduzir uma representação integral clássica de Muskhelishvili que será necessária para reduzir o problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento de Carleman tal que $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ a uma equação integral singular com deslocamento. Depois de fazermos a referida redução, usamos o Teorema 1.20 para obter a teoria de Noether desta equação. Em seguida construímos o problema aliado ao problema (3.2), a partir do qual obtemos as condições de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado.

Antes de mais chamamos a atenção para o facto de que, no caso de um problema de limite polinomial para funções analíticas num domínio simplesmente conexo, as representações integrais dessas funções contêm algumas constantes. Assim, os membros direitos das equações integrais correspondentes ao problema de limite dependem destas constantes. Se as constantes forem determinadas unívocamente, então o problema de limite e a equação integral singular correspondente são equivalentes. Contudo, neste caso, para a equivalência entre o problema de limite aliado correspondente e a equação integral singular aliada devem satisfazer-se algumas condições. Por outro lado, se as constantes forem arbitrárias, então o problema de limite e a equação integral singular não são equivalentes mas, pelo contrário, o problema de

limite aliado e a equação integral singular aliada são equivalentes. É possível mostrar que o índice do problema de limite excede por um o índice da equação integral singular correspondente.

Apresentamos agora o seguinte resultado sobre representações integrais para uma função analítica num domínio simplesmente conexo limitado (ver, por exemplo, [32] (Cap. 8), [2]).

Teorema 3.1 *Seja D^+ um domínio simplesmente conexo limitado por uma curva simples fechada de Lyapunov Γ . Qualquer função $\Phi^+(z)$ analítica em D^+ , e cujos valores limite sobre Γ pertencem a $H_\mu(\Gamma)$, pode ser representada por qualquer uma das seguintes fórmulas*

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau + iC, \quad (3.3)$$

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\nu(\tau)}{\tau - z} d\tau + C,$$

onde as densidades μ e ν são funções reais da classe $H_\mu(\Gamma)$ e C é uma constante real.

Usamos agora a representação integral (3.3) para reduzir o problema (3.2) à equação integral singular

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}\mu)(t) \equiv & \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{A}(t) \mu(t) + \mathcal{B}(t) \mu(\alpha(t)) + \mathcal{A}(t) (S\mu)(t) \right. \\ & \left. + \frac{\gamma \mathcal{B}(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\alpha'(\tau) \mu(\alpha(\tau))}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} d\tau \right\} = g(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $g(t) = 2h(t) + 2C \operatorname{Im} [\mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t)]$, $\gamma = +1$ se α é um deslocamento directo de Carleman ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$) e $\gamma = -1$ se α é um deslocamento inverso de Carleman ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$). Em seguida construímos o operador aliado \mathcal{K}' , o qual satisfaz a identidade

$$\int_{\Gamma} \mu(t) (\mathcal{K}'\psi)(t) dt = \int_{\Gamma} \psi(t) (\mathcal{K}\mu)(t) dt, \quad (3.5)$$

e consideramos a equação integral singular homogénea aliada

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}'\psi)(t) \equiv & \left[\mathcal{A}(t) + \overline{\mathcal{A}(t)} \right] \psi(t) + \gamma \left[\mathcal{B}(\alpha(t)) + \overline{\mathcal{B}(\alpha(t))} \right] \alpha'(t) \psi(\alpha(t)) \\ & - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\mathcal{A}(\tau)}{\tau - t} - \frac{t'(s) \overline{\mathcal{A}(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{t}} \right] \psi(\tau) d\tau \\ & - \frac{\gamma}{\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\mathcal{B}(\alpha(t))}{\tau - t} - t'^2(s) \frac{\overline{\mathcal{B}(\alpha(t))}}{\bar{\tau} - \bar{t}} \right] \alpha'(\tau) \psi(\alpha(\tau)) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3.6) pela função $t'(s)$ e tendo em conta a igualdade

$$t'(s) |_{t=\alpha(t)} = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} t'(s),$$

observamos que a equação $t'(s) \mathcal{K}'\psi = 0$ é uma equação com coeficientes e núcleos reais em relação à nova função incógnita $\nu(t) = \psi(t) t'(s)$. Assim (ver, por exemplo,

[32]) podemos considerar $\nu(t)$ como uma função real. Mas, nesse caso, obtemos que a condição (3.5) coincide com a condição

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \mu(t) (\mathcal{K}'\psi)(t) dt = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \psi(t) (\mathcal{K}\mu)(t) dt .$$

Assim, a equação $t'(s) \mathcal{K}'\psi = 0$ pode reescrever-se na forma

$$\operatorname{Re} \left\{ \mathcal{A}(t) \nu(t) + \gamma \mathcal{B}(\alpha(t)) |\alpha'(t)| \nu(\alpha(t)) - \frac{t'(s)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{A}(\tau) \nu(\tau) + \gamma \mathcal{B}(\alpha(\tau)) |\alpha'(\tau)| \nu(\alpha(\tau))}{\tau - t} d\sigma \right\} = 0 . \quad (3.7)$$

De acordo com as observações anteriores, a equação (3.7) é equivalente à equação (3.6), e será também denominada *equação aliada à equação (3.4)*. Denotamos os números de soluções linearmente independentes das equações integrais (3.4) e (3.7) por k e k' , respectivamente. A teoria de Noether da equação (3.4) obtém-se pelo Teorema 1.20.

Teorema 3.2 *A equação integral singular (3.4) é Noetheriana se for satisfeita sobre Γ a condição*

$$\Lambda(t, \gamma) = (1 + \gamma) \left\{ \overline{\mathcal{A}(t) \mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t) \mathcal{B}(\alpha(t))} \right\} + (1 - \gamma) \left\{ \overline{\mathcal{A}(t) \mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t) \mathcal{B}(\alpha(t))} \right\} \neq 0 . \quad (3.8)$$

Se a condição (3.8) for satisfeita, então o índice I_0 da equação integral singular (3.4) é dado pela fórmula

$$I_0 = k - k' = \frac{1}{2\pi} \{ \arg \Lambda(t, \gamma) \}_{\Gamma} . \quad (3.9)$$

Teorema 3.3 *Suponhamos que a condição (3.8) é satisfeita. Então a equação integral singular (3.4) é solúvel se e só se*

$$\int_{\Gamma} \{ h(t) + C \operatorname{Im} [\mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t)] \} \nu_j(t) ds = 0 , \quad (3.10)$$

onde $\{\nu_j(t)\}_{j=1,2,\dots,k'}$, é um sistema completo de soluções linearmente independentes da equação aliada (3.7).

Passamos agora à construção do problema de limite aliado e obtemos as condições de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado.

Seja ν uma solução da equação aliada (3.7). Consideremos o integral do tipo de Cauchy

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{A}(\tau) \nu(\tau) + \gamma \mathcal{B}(\alpha(\tau)) |\alpha'(\tau)| \nu(\alpha(\tau))}{\tau - z} d\sigma . \quad (3.11)$$

Pela equação (3.7) temos

$$\operatorname{Re} [t'(s) \Psi^-(t)] = 0$$

ou

$$t'(s) \Psi^-(t) + \overline{t'(s) \Psi^-(t)} = 0. \quad (3.12)$$

Em seguida provamos que, se a condição

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} [\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau)] \nu(\tau) d\sigma = 0 \quad (3.13)$$

for satisfeita, então $\Psi^-(z) \equiv 0$ em D^- . Com efeito, começamos por observar que, uma vez que a função $\Psi^-(z)$ está representada na forma de um integral do tipo de Cauchy, temos $\Psi^-(\infty) = 0$. Suponhamos que $\Psi^-(z) \not\equiv 0$ e sejam \mathcal{N}_{D^-} e \mathcal{N}_{Γ} os números de zeros da função $\Psi^-(z)$ no domínio D^- e na sua fronteira Γ , respectivamente.

Então

$$\frac{1}{2\pi} \{ \arg \Psi^-(t) \}_{\Gamma} = -\mathcal{N}_{D^-} - \frac{1}{2} \mathcal{N}_{\Gamma}.$$

Tendo em conta que $\frac{1}{2\pi} \{ \arg t'(s) \}_{\Gamma} = 1$, da condição de limite (3.12) obtemos que $2\mathcal{N}_{D^-} + \mathcal{N}_{\Gamma} = 2$. Como $\mathcal{N}_{D^-} \geq 1$, podemos concluir que $\mathcal{N}_{\Gamma} = 0$ e $\mathcal{N}_{D^-} = 1$.

Consequentemente

$$\int_{\Gamma} \Psi^-(t) dt = -2\pi i \operatorname{Res} \Psi^-(z) |_{z=\infty} \neq 0. \quad (3.14)$$

Por outro lado, da representação (3.11) decorre que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \Psi^-(z) |_{z=\infty} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \{ \mathcal{A}(\tau) \nu(\tau) + \gamma \mathcal{B}(\alpha(\tau)) |\alpha'(\tau)| \nu(\alpha(\tau)) \} d\sigma \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau)] \nu(\tau) d\sigma. \end{aligned}$$

De (3.14) concluimos que

$$\int_{\Gamma} [\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau)] \nu(\tau) d\sigma \neq 0.$$

Integrando ao longo de Γ a condição de limite (3.12), obtemos

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \Psi^-(t) dt = 0.$$

Portanto

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} [\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau)] \nu(\tau) d\sigma = 0.$$

Assim, temos

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} [\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau)] \nu(\tau) d\sigma \neq 0,$$

o que contradiz a condição (3.13). Esta contradição prova que, se a condição (3.13) for satisfeita então $\Psi^-(z) \equiv 0$ em D^- . Consequentemente, de (3.11) decorre que

$$\mathcal{A}(t) \nu(t) + \gamma \mathcal{B}(\alpha(t)) |\alpha'(t)| \nu(\alpha(t)) = t'(s) \Psi^+(t). \quad (3.15)$$

Agora invertamos a fórmula (3.15). Para isso consideramos um sistema de duas equações em $\nu(t)$ e $\nu(\alpha(t))$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t)\nu(t) + \gamma\mathcal{B}(\alpha(t))|\alpha'(t)|\nu(\alpha(t)) &= t'(s)\Psi^+(t) \\ \gamma\mathcal{B}(t)\nu(t) + \mathcal{A}(\alpha(t))|\alpha'(t)|\nu(\alpha(t)) &= \alpha'(t)t'(s)\Psi^+(\alpha(t)).\end{aligned}\quad (3.16)$$

Usando a condição (3.8), de (3.16) com $\gamma = 1$ obtemos

$$\nu(t) = \frac{\mathcal{A}(\alpha(t))t'(s)\Psi^+(t) - \mathcal{B}(\alpha(t))\alpha'(t)t'(s)\Psi^+(\alpha(t))}{\mathcal{A}(t)\mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t)\mathcal{B}(\alpha(t))}.\quad (3.17)$$

De (3.17), multiplicando e dividindo por $\overline{\mathcal{A}(t)\mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t)\mathcal{B}(\alpha(t))}$ e tendo em conta que $\nu(t)$ é uma função real, obtemos o problema de limite

$$\operatorname{Re} \left\{ i \left[\overline{\mathcal{A}(t)\mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t)\mathcal{B}(\alpha(t))} \right] t'(s) \right. \\ \left. [\mathcal{A}(\alpha(t))\Psi^+(t) - \mathcal{B}(\alpha(t))\alpha'(t)\Psi^+(\alpha(t))] \right\} = 0 \quad (3.18)$$

aliado ao problema de limite (3.2) no caso em que α é um deslocamento directo de Carleman.

Seja, agora, α um deslocamento inverso de Carleman ($\gamma = -1$). Como $\nu(t)$ é uma função real, o sistema (3.16) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}(t)}\nu(t) + \gamma\overline{\mathcal{B}(\alpha(t))}|\alpha'(t)|\nu(\alpha(t)) &= \overline{t'(s)\Psi^+(t)} \\ \gamma\mathcal{B}(t)\nu(t) + \mathcal{A}(\alpha(t))|\alpha'(t)|\nu(\alpha(t)) &= \alpha'(t)t'(s)\Psi^+(\alpha(t)).\end{aligned}\quad (3.19)$$

Do sistema (3.19) e da condição (3.8) com $\gamma = -1$ obtemos

$$\nu(t) = \frac{\mathcal{A}(\alpha(t))\overline{t'(s)\Psi^+(t)} + \overline{\mathcal{B}(\alpha(t))}\alpha'(t)t'(s)\Psi^+(\alpha(t))}{\overline{\mathcal{A}(t)}\mathcal{A}(\alpha(t)) - \overline{\mathcal{B}(t)}\mathcal{B}(\alpha(t))}.\quad (3.20)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (3.20) por i , e depois multiplicando o numerador e o denominador em (3.20) por $\overline{\mathcal{A}(t)\mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t)\mathcal{B}(\alpha(t))}$ obtemos o problema de limite aliado ao problema de limite (3.2) no caso em que α é um deslocamento inverso de Carleman:

$$\operatorname{Re} \left\{ i \left[\overline{\mathcal{A}(t)\mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t)\mathcal{B}(\alpha(t))} \right] \left[\overline{\mathcal{A}(\alpha(t))t'(s)\Psi^+(t)} \right. \right. \\ \left. \left. + \overline{\mathcal{B}(\alpha(t))}\alpha'(t)t'(s)\Psi^+(\alpha(t)) \right] \right\} = 0.\quad (3.21)$$

Os problemas de limite (3.18) e (3.21), aliados ao problema (3.2) para um deslocamento α de Carleman directo ou inverso, respectivamente, foram obtidos a partir da equação aliada (3.7) sob a condição adicional (3.13). Assim é necessário considerar as duas situações seguintes:

- (i) qualquer solução da equação aliada (3.7) satisfaz a condição (3.13),
- (ii) pelo menos uma das soluções da equação (3.7) não satisfaz a condição (3.13).

De acordo com o Teorema 3.3, se a condição (3.8) for satisfeita, então para a resolubilidade da equação (3.4) é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as condições (3.10). No caso (i), qualquer solução $\nu(t)$ da equação aliada satisfaz a condição (3.13) e, assim, a constante C mantém-se arbitrária e as condições (3.10) tomam a forma

$$\int_{\Gamma} h(t) \nu_j(t) ds = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k'. \quad (3.22)$$

Se pelo menos uma das soluções $\nu_1(t), \nu_2(t), \dots, \nu_{k'}(t)$ da equação aliada (3.7), por exemplo a solução $\nu_{k'}(t)$, não satisfaz a condição (3.13), então as funções

$$\nu_j^*(t) = \nu_j(t) - \beta_j \nu_{k'}(t), \quad j = 1, 2, \dots, k' - 1,$$

com

$$\beta_j = \frac{\operatorname{Im} \int_{\Gamma} [\mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t)] \nu_j(t) ds}{\operatorname{Im} \int_{\Gamma} [\mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t)] \nu_{k'}(t) ds},$$

são soluções da equação da equação aliada (3.7) que satisfazem a condição (3.13). Consequentemente, como no caso anterior, para as $k' - 1$ soluções $\nu_j^*(t)$ mencionadas, as condições de resolubilidade (3.10) podem reduzir-se à forma (3.22). Da condição (3.10), para a solução $\nu_{k'}(t)$ obtemos

$$\int_{\Gamma} h(t) \nu_{k'}(t) ds = -C \int_{\Gamma} \operatorname{Im} [\mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t)] \nu_{k'}(t) ds. \quad (3.23)$$

Visto que o integral no membro direito da igualdade (3.23) não é igual a zero, a condição (3.23) é satisfeita para uma escolha conveniente da constante C . Como as funções $\nu(t)$ e $h(t)$ são reais, as condições (3.22) podem escrever-se na forma

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} h(t) \nu_j(t) \overline{t'(s)} dt = 0.$$

Substituindo (3.17) e (3.20) para $\nu_j(t)$ e fazendo algumas transformações, obtemos o

Teorema 3.4 *Suponhamos que a condição (3.8) é satisfeita. Para a resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as seguintes condições:*

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \frac{h(t) \mathcal{A}(\alpha(t)) - h(\alpha(t)) \mathcal{B}(t)}{\mathcal{A}(t) \mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t) \mathcal{B}(\alpha(t))} \Psi_j^+(t) dt = 0,$$

se α é um deslocamento directo de Carleman e

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \frac{h(t) \overline{\mathcal{A}(\alpha(t))} - h(\alpha(t)) \overline{\mathcal{B}(t)}}{\mathcal{A}(t) \overline{\mathcal{A}(\alpha(t))} - \overline{\mathcal{B}(t)} \mathcal{B}(\alpha(t))} \Psi_j^+(t) dt = 0,$$

se α é um deslocamento inverso de Carleman, onde $\Psi_j^+(z)$ são as soluções dos problemas de limite aliados correspondentes (3.18) e (3.21).

Estamos agora em condições de obter as condições de Noether do problema (3.2) e de calcular o seu índice.

Teorema 3.5 *Se for satisfeita sobre Γ a desigualdade*

$$\Lambda(t, \gamma) \neq 0, \quad (3.24)$$

então o problema de limite de Hilbert generalizado é Noetheriano.

Prova. Se a condição (3.24) for satisfeita, então, de acordo com o Teorema 3.2, a equação integral (3.4) correspondente ao problema de limite (3.2) é Noetheriana. Portanto os números k e k' são finitos. Das relações estabelecidas anteriormente entre a equação (3.4) e o problema (3.2) e também entre a equação aliada (3.7) e os problemas aliados (3.18) (ou (3.21)), decorre, pelo menos, que os números l e l' de soluções linearmente independentes do problema (3.2) e do problema aliado (3.18) ((3.21)), respectivamente, são também finitos. Além disso, de acordo com o Teorema 3.4, o problema de limite (3.2) é normalmente solúvel se for satisfeita a condição (3.24). Consequentemente o problema (3.2) é Noetheriano. ■

Teorema 3.6 *Se a condição (3.24) for satisfeita, então o índice do problema de limite de Hilbert generalizado é dado pela fórmula*

$$I = l - l' = \frac{1}{2\pi} \{ \arg \Lambda(t, \gamma) \}_\Gamma + 1.$$

Prova. Suponhamos que qualquer solução da equação aliada (3.7) satisfaz a condição (3.13). Então qualquer solução da equação (3.7) gera uma solução correspondente do problema aliado (3.18) ((3.21)). Desta forma $l' = k'$, e a constante C no membro direito da equação (3.4) mantém-se arbitrária. Assim $l = k + 1$. Aplicando o Teorema 3.2 obtemos $I = l - l' = k + 1 - k' = I_0 + 1$.

Suponhamos que pelo menos uma das soluções da equação (3.7) não satisfaz a condição (3.13). Então, como já foi provado, a equação (3.7) tem $k' - 1$ soluções linearmente independentes que satisfazem a condição (3.13). Para cada uma dessas soluções a fórmula (3.11) dá-nos uma solução não trivial do problema aliado correspondente. Assim $l' = k' - 1$. Neste caso a constante C no membro direito da equação (3.4) determina-se univocamente pela fórmula (3.23) logo $l = k$. Usando o Teorema 3.2 obtemos $I = l - l' = k - (k' - 1) = I_0 + 1$. ■

É conveniente observar que todos os resultados apresentados acima foram obtidos considerando o caso em que α é um deslocamento que satisfaz $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$. Em seguida passamos a considerar os casos em que α é um deslocamento não Carlemaniano ou um deslocamento directo de Carleman com pontos periódicos de multiplicidade $k \geq 2$. Mais precisamente, usaremos os resultados expostos na Secção 1.5 para apresentar a teoria de Noether do problema de Hilbert generalizado para os casos referidos.

A construção do problema aliado no caso de um deslocamento Carlemaniano de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$), permitiu-nos obter as condições de resolubilidade do problema de Hilbert generalizado (Teorema 3.4) e esclarecer que uma fórmula para o índice (ver Teorema 3.6) deste problema é dada por $I = I_0 + 1$ (ver (3.9)). Nos restantes casos não procederemos à construção dos problemas aliados, consequentemente não apresentaremos os teoremas análogos ao Teorema 3.4. Assim, vamos apenas usar os resultados da Secção 1.5 e o facto já esclarecido de que $I = I_0 + 1$ para obter a teoria de Noether, i.e., resultados análogos aos Teoremas 3.5 e 3.6,

para o caso de um deslocamento α não Carlemaniano ou um deslocamento directo de Carleman tal que $\alpha_k(t) \equiv t$ para $k \geq 2$.

Começamos por apresentar as condições de Noether e uma fórmula para o índice do problema de Hilbert generalizado no caso de um deslocamento directo de Carleman de ordem $k \geq 2$.

Teorema 3.7 *O problema de limite de Hilbert generalizado com um deslocamento directo α tal que $\alpha_k(t) \equiv t$ para $k \geq 2$ é Noetheriano se*

$$\Delta(t) = \prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}(\alpha_i(t)) + (-1)^{k-1} \prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{B}(\alpha_i(t)) \neq 0,$$

e nesse caso o índice deste mesmo problema é dado por

$$I = -\frac{1}{\pi k} \{\arg \Delta(t)\}_\Gamma + 1 = -\frac{2}{k} \text{Ind}_\Gamma \Delta(t) + 1.$$

Se α é um deslocamento directo com um número finito de pontos fixos $\{\tau_i\}_{j=1,\dots,l}$, a teoria de Noether do problema de limite de Hilbert generalizado é dada pelo seguinte teorema

Teorema 3.8 *Se α é um deslocamento nas condições acima, o problema de limite de Hilbert generalizado é de Noether se for satisfeita uma das seguintes condições*

- (1) $\mathcal{A} \neq 0$ sobre Γ e $|\mathcal{A}(\tau_j)| > |\mathcal{B}(\tau_j)|$ para qualquer $j \in \{1, \dots, l\}$
- (2) $\mathcal{B} \neq 0$ sobre Γ e $|\mathcal{A}(\tau_j)| < |\mathcal{B}(\tau_j)|$ para qualquer $j \in \{1, \dots, l\}$

e para cada um dos casos (1) e (2) o índice do problema é dado, respectivamente, por

- (1) $I = -2\text{Ind}_\Gamma \mathcal{A}(t) + 1$
- (2) $I = -2\text{Ind}_\Gamma \mathcal{B}(t) + 1$

Quando α é um deslocamento directo com um conjunto finito de pontos periódicos, $\{\tau_i\}_{j=1,\dots,l}$, com multiplicidade $k > 1$ a teoria de Noether do problema de Hilbert generalizado é a seguinte

Teorema 3.9 *Se α é um deslocamento directo com um número finito de pontos periódicos, $\{\tau_i\}_{j=1,\dots,l}$, com multiplicidade $k > 1$, se for satisfeita uma das condições*

- (1) $\mathcal{A} \neq 0$ sobre Γ e $\prod_{i=0}^{k-1} |\mathcal{A}(\alpha_i(\tau_j))| > \prod_{i=0}^{k-1} |\mathcal{B}(\alpha_i(\tau_j))|$ para qualquer $j \in \{1, \dots, l\}$
- (2) $\mathcal{B} \neq 0$ sobre Γ e $\prod_{i=0}^{k-1} |\mathcal{A}(\alpha_i(\tau_j))| < \prod_{i=0}^{k-1} |\mathcal{B}(\alpha_i(\tau_j))|$ para qualquer $j \in \{1, \dots, l\}$

então o problema de limite de Hilbert generalizado é Noetheriano e, em cada um dos casos, o seu índice é dado, respectivamente, pelas fórmulas

$$(1) I = -2\text{Ind}_\Gamma \mathcal{A}(t) + 1$$

$$(2) I = -2\text{Ind}_\Gamma \mathcal{B}(t) + 1$$

No caso em que α é um deslocamento directo com um conjunto não vazio arbitrário de pontos periódicos com multiplicidade $k \geq 1$, e voltando a considerar a função ν_α definida pela fórmula (1.76), temos a seguinte teoria de Noether para o problema de Hilbert generalizado

Teorema 3.10 *Nas condições acima, o problema de limite de Hilbert generalizado é de Noether se*

$$\nu_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq 0 \text{ sobre } \Gamma$$

e, nesse caso, uma fórmula para o índice deste problema é

$$I = -\frac{2}{k} \text{Ind}_\Gamma \nu_\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + 1$$

O teorema seguinte dá-nos as condições de Noether e uma fórmula para o índice do problema de Hilbert generalizado no caso em que $\Gamma = \mathbb{T}$ e α é um deslocamento ergódico da forma $\alpha(t) = e^{i\theta}t$, com $\frac{\theta}{2\pi}$ um número irracional.

Teorema 3.11 *Nas condições referidas, o problema de limite de Hilbert generalizado é Noetheriano se for satisfeita uma das condições seguintes*

$$(1) \mathcal{A} \neq 0 \text{ sobre } \mathbb{T} \text{ e } \exp \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln |\mathcal{A}(t)| |dt| > \exp \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln |\mathcal{B}(t)| |dt|$$

$$(2) \mathcal{B} \neq 0 \text{ sobre } \mathbb{T} \text{ e } \exp \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln |\mathcal{A}(t)| |dt| < \exp \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \ln |\mathcal{B}(t)| |dt|$$

em cada um destes casos o índice do problema é dado, respectivamente, por

$$(1) I = -2\text{Ind}_{\mathbb{T}} \mathcal{A}(t) + 1$$

$$(2) I = -2\text{Ind}_{\mathbb{T}} \mathcal{B}(t) + 1$$

Resta-nos considerar o caso de um deslocamento inverso não Carlemaniano. No caso geral de um deslocamento inverso α tal que α_2 é um deslocamento directo com um conjunto não vazio arbitrário de pontos fixos, que não coincide com toda a curva Γ , a teoria de Noether do problema de Hilbert generalizado é dada pelo teorema seguinte.

Teorema 3.12 *Para um deslocamento nas condições acima, o problema de limite de Hilbert generalizado é de Noether se*

$$\nu_{\alpha_2} \left(\mathcal{A}(t) \overline{\mathcal{A}(\alpha(t))}, \mathcal{B}(\alpha(t)) \overline{\mathcal{B}(t)} \right) \neq 0 \text{ sobre } \Gamma,$$

onde a função ν_{α_2} é definida pela fórmula (1.76) e, se for este o caso, o seu índice é determinado pela fórmula

$$I = -\text{Ind}_\Gamma \nu_{\alpha_2} \left(\mathcal{A}(t) \overline{\mathcal{A}(\alpha(t))}, \mathcal{B}(\alpha(t)) \overline{\mathcal{B}(t)} \right) + 1$$

Em particular, se o deslocamento α_2 tiver apenas dois pontos fixos τ_1 e τ_2 , o teorema anterior toma a forma

Teorema 3.13 *Se α é um deslocamento inverso não Carlemaniano com pontos fixos τ_1 e τ_2 e tal que o deslocamento α_2 também admite apenas esses mesmos pontos fixos, então o problema de limite de Hilbert generalizado é Noetheriano se for satisfeita uma das condições seguintes*

$$(1) \mathcal{A} \neq 0 \text{ sobre } \Gamma \text{ e } |\mathcal{A}(\tau_j)| > |\mathcal{B}(\tau_j)| \text{ para } j = 1, 2$$

$$(2) \mathcal{B} \neq 0 \text{ sobre } \Gamma \text{ e } |\mathcal{B}(\tau_j)| > |\mathcal{A}(\tau_j)| \text{ para } j = 1, 2$$

Para cada um destes casos, as fórmulas para o índice são, respectivamente,

$$(1) I = -2\text{Ind}_{\Gamma}\mathcal{A}(t) + 1$$

$$(2) I = 2\text{Ind}_{\Gamma}\mathcal{B}(t) + 1$$

3.2 Teoria de resolubilidade

Nesta secção apresentamos alguns resultados relativos à teoria de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento de Carleman tal que $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$. Consideramos o caso de um deslocamento directo na Subsecção 3.2.1 e o caso de um deslocamento inverso na Subsecção 3.2.2.

Expomos alguns casos particulares deste problema, que foram considerados em [10] e [26] (Sec. 24) e que, devido às condições impostas aos coeficientes, podem ser reduzidos a problemas do tipo de Carleman e de Hilbert. Procuramos também calcular os números de defeito l e ρ do referido problema, no caso geral, quando α é um deslocamento linear fraccionário de Carleman de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$) sobre a circunferência unitária \mathbb{T} . Para isso começaremos por reduzir o estudo da teoria de resolubilidade do problema (3.2) à teoria de resolubilidade de um operador integral singular sem deslocamento e depois usamos os resultados apresentados nas secções 1.3 e 1.4. Incluimos ainda, nesta secção, exemplos do problema de limite de Hilbert generalizado, tanto com um deslocamento directo como com um deslocamento inverso, para os quais, em geral, o problema não homogéneo (3.2) pode não ser solúvel, embora o problema homogéneo correspondente tenha soluções não triviais.

Começamos por introduzir algumas identidades que nos vão ser úteis no seguimento. Definindo

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \mathcal{A}(t)\mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t)\overline{\mathcal{B}(\alpha(t))} , \\ \theta(t) &= \overline{\mathcal{A}(t)}\mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t)\overline{\mathcal{B}(\alpha(t))} , \\ V(t) &= \mathcal{B}(t)\overline{\mathcal{A}(\alpha(t))} - \overline{\mathcal{B}(t)}\mathcal{A}(\alpha(t)) , \end{aligned}$$

as seguintes identidades são satisfeitas

$$|\theta(t)|^2 - |\Delta(t)|^2 = V(t)V(\alpha(t)) , \quad (3.25)$$

$$\theta(t) = \overline{\theta(\alpha(t))} , \Delta(t) = \Delta(\alpha(t)) , V(t) + \overline{V(t)} = 0 . \quad (3.26)$$

Salientamos que da última igualdade em (3.26) decorre que $\text{Re}V = 0$, conseqüentemente $V = iV_0$ com V_0 função real ($V_0 = -iV$). Introduzimos ainda a designação $\kappa = I_0$ (ver (3.9)), que será assumida ao longo de toda esta secção.

3.2.1 Teoria de resolubilidade no caso de um deslocamento directo

Consideramos inicialmente o problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento de Carleman de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$) que preserva a orientação.

Antes de mais, observamos que, neste caso, com a notação introduzida acima, a condição de Noether (3.24) pode ser escrita na forma $\Delta(t) \neq 0$, além disso, aqui, $\kappa = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \overline{\Delta(t)} \right\}_{\Gamma} = \text{Ind}_{\Gamma} \overline{\Delta(t)}$ e o índice do problema de limite de Hilbert generalizado (ver Teorema 3.6) é dado pela fórmula $I = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \Delta(t) \right\}_{\Gamma} + 1 = \kappa + 1$.

Passamos agora a apresentar dois casos particulares degenerados do problema (3.2) com um deslocamento directo para os quais é possível obter os números de defeito l e ρ . Num destes casos o problema (3.2) reduz-se a um problema do tipo de Carleman, e no outro caso a um problema de Hilbert clássico.

Começemos pelo caso particular do problema (3.2) em que $\alpha = \alpha_+$, $\Delta(t) \neq 0$ e $\theta(t) \equiv 0$. Verificamos que, nestas condições $\mathcal{A}(t) \neq 0$, $\mathcal{B}(t) \neq 0$ para $t \in \Gamma$. De facto, se, por exemplo, $\mathcal{A}(t_0) = 0$ com $t_0 \in \Gamma$, então da condição $\theta(t) \equiv 0$ decorre que ou $\mathcal{B}(t_0) = 0$ ou $\mathcal{B}(\alpha(t_0)) = 0$, o que contraria a condição de Noether $\Delta \neq 0$ sobre Γ . Além disso, da igualdade (3.25) decorre que a função imaginária pura V não se anula em Γ . Logo $\left\{ \arg V(t) \right\}_{\Gamma} = 0$. Usando a igualdade $\theta(t) \equiv 0$ obtemos

$$\overline{\Delta(t)} = \overline{\mathcal{A}(t) \mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t) \mathcal{B}(\alpha(t))} = \frac{\overline{\mathcal{B}(\alpha(t))}}{\mathcal{A}(\alpha(t))} V(t) .$$

Assim (ver Teorema 3.2),

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \overline{\Delta(t)} \right\}_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\overline{\mathcal{B}(\alpha(t))}}{\mathcal{A}(\alpha(t))} \right\}_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{B}(t)} \right\}_{\Gamma} .$$

Usando as condições $\Delta(t) \neq 0$ e $\theta(t) \equiv 0$ transformamos a condição de limite (3.2) na seguinte condição de limite de um problema do tipo de Carleman (ver (2.26))

$$\Phi^+(\alpha(t)) = -\frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{B}(t)} \overline{\Phi^+(t)} + \frac{\overline{\mathcal{A}(\alpha(t))} h(t) - \overline{\mathcal{B}(t)} h(\alpha(t))}{V(t)} . \quad (3.27)$$

Conforme foi explicado no final da Secção 2.1, quando é considerado sobre a circunferência unitária \mathbb{T} , este problema ser visto como um caso particular do problema de limite de Haseman. No entanto aqui consideramos uma curva Γ qualquer.

A condição $\theta(t) \equiv 0$ garante a satisfação das condições de resolubilidade (ver fórmulas (11.3) e (11.4) de [26]) do problema (3.27) para qualquer função $h(t) \in H_{\mu}(\Gamma)$.

Sendo $\kappa = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{B}(t)} \right\}_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{a(t)+ic(t)}{b(t)-id(t)} \right\}_{\Gamma} = I_0$, temos $I = \kappa + 1$ e, de acordo com os Teoremas 11.5 e 11.6 de [26], obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.14 *Se forem satisfeitas as condições $\Delta(t) \neq 0$ e $\theta(t) \equiv 0$, então os números de soluções linearmente independentes, l , e de condições de resolubilidade, ρ , de um problema de limite de Hilbert generalizado com um deslocamento directo de Carleman tal que $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ são dados pelas fórmulas*

$$l = \max(0, \kappa + 1) \quad , \quad \rho = \max(0, -\kappa - 1) .$$

Exemplo 3.15 Consideremos o problema de limite de Hilbert generalizado (3.1) com um deslocamento directo e sejam $a(t) = d(t) = 0$. Neste caso a condição $\theta(t) = 0$ escreve-se $c(t)c(\alpha(t)) = b(t)b(\alpha(t))$ e a condição de Noether toma a forma $b(t) \neq 0, c(t) \neq 0$.

Temos $\kappa = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{ic(t)}{b(t)} \right\}_{\Gamma} = 0$. Assim, segundo o teorema anterior, o problema de limite de Gakov (ver (IV) na Introdução)

$$b(t)u(\alpha(t)) + c(t)v(t) = h(t)$$

nas condições referidas tem sempre solução dependente de uma constante real arbitrária.

Consideramos agora outro caso particular degenerado do problema (3.2). Continuando a assumir que $\alpha = \alpha_+$, suponhamos agora que se satisfazem as condições $\Delta(t) \neq 0$ e $V(t) \equiv 0$. Neste caso, de (3.25), decorre que $\theta(t) \neq 0$. Além disso, da condição $\Delta(t) \neq 0$ decorre que \mathcal{A} e \mathcal{B} não podem anular-se simultâneamente sobre Γ . Assim, supondo adicionalmente que $\mathcal{A}(t) \neq 0$ sobre Γ , de $V(t) \equiv 0$ obtemos $\overline{\mathcal{B}(t)} = \frac{\mathcal{B}(t)\mathcal{A}(\alpha(t))}{\mathcal{A}(\alpha(t))}$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \overline{\Delta(t)} &= \overline{\mathcal{A}(t)\mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t)\mathcal{B}(\alpha(t))} \\ &= \overline{\mathcal{A}(t)\mathcal{A}(\alpha(t))} - \frac{\mathcal{B}(t)\overline{\mathcal{A}(\alpha(t))}}{\mathcal{A}(\alpha(t))}\overline{\mathcal{B}(\alpha(t))} = \frac{\overline{\mathcal{A}(\alpha(t))}}{\mathcal{A}(\alpha(t))}\theta(t). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \overline{\Delta(t)} \right\}_{\Gamma} = -\frac{1}{\pi} \left\{ \arg \mathcal{A}(t) \right\}_{\Gamma} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \theta(t) \right\}_{\Gamma} \\ &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \arg \mathcal{A}(t) \right\}_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{A}(t)} \right\}_{\Gamma}, \end{aligned}$$

onde usamos o facto de que, no caso $\alpha = \alpha_+$, $\left\{ \arg \theta(t) \right\}_{\Gamma} = 0$ de acordo com a primeira igualdade em (3.26).

Por sua vez a fórmula do índice (ver Teorema 3.6) toma a forma

$$I = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{A}(t)} \right\}_{\Gamma} + 1.$$

Utilizando as condições $\Delta(t) \neq 0$ e $V(t) \equiv 0$ é possível reduzir o problema (3.2) ao problema de limite de Hilbert equivalente

$$\Phi^+(t) = -\frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{A}(t)}\overline{\Phi^+(t)} + \frac{\overline{\mathcal{A}(\alpha(t))}h(t) - \mathcal{B}(t)h(\alpha(t))}{\theta(t)}.$$

Temos

$$\kappa = I_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{A}(t)} \right\}_{\Gamma} = \frac{1}{\pi} \left\{ \arg (a(t) + ic(t)) \right\}_{\Gamma},$$

Assim, aplicando o Teorema 2.1, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.16 *Se forem satisfeitas as condições $\Delta(t) \neq 0$, $V(t) \equiv 0$ e $\mathcal{A}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, então os números de soluções linearmente independentes e de condições de resolubilidade de um problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento directo de Carleman tal que $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ exprimem-se pelas relações*

$$l = \max(0, \kappa + 1) \quad , \quad \rho = \max(0, -\kappa - 1) \quad .$$

Exemplo 3.17 O problema de Hilbert clássico

$$a(t)u(t) + c(t)v(t) = h(t) \quad \text{sobre } \Gamma \quad ,$$

pode ser considerado como um caso particular do problema anterior. Com efeito, neste caso temos $b(t) = d(t) = 0$. Assim, a condição $V(t) \equiv 0$ satisfaz-se automaticamente e a condição $\Delta(t) \neq 0$ garante que $\mathcal{A}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ e leva-nos à condição de Noether

$$a^2(t) + c^2(t) \neq 0 \quad \text{sobre } \Gamma$$

do problema de limite de Hilbert clássico.

Se não forem impostas as condições degenerativas $\theta(t) \equiv 0$ ou $V(t) \equiv 0$, consideradas nos dois casos particulares apresentados acima, não são conhecidos resultados relativamente à teoria de resolubilidade do problema de Hilbert generalizado (3.2). Procuramos em seguida obter os números de defeito l e ρ quando o problema (3.2) é considerado sobre a circunferência unitária \mathbb{T} e α é um deslocamento linear fraccionário de Carleman de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$).

Assim, começamos por observar que, se $\Gamma = \mathbb{T}$, o estudo da teoria de resolubilidade do problema (3.2) reduz-se ao estudo da teoria de resolubilidade do operador integral singular com deslocamento

$$T = (\mathcal{A}I + \mathcal{B}W)P_+ - (t\bar{\mathcal{A}}I + \alpha(t)\bar{\mathcal{B}}W)P_- \quad . \quad (3.28)$$

Com efeito, temos

$$2\text{Re} \{ \mathcal{A}\Phi^+ + \mathcal{B}\Phi^+(\alpha) \} = (\mathcal{A}I + \mathcal{B}W)\Phi^+ + (\bar{\mathcal{A}}I + \bar{\mathcal{B}}W)\mathbf{C}\Phi^+ \quad .$$

Voltando agora a considerar a função Φ^- definida por (2.5), temos que, sobre \mathbb{T} , $\bar{\Phi}^+ = \Phi^-$. Usando um raciocínio análogo ao que foi utilizado na Secção 2.1, introduzimos uma nova função incógnita $\Phi_1^-(z)$ por

$$\Phi_1^-(z) = \frac{1}{z}\Phi^-(z) \quad ,$$

e obtemos

$$2\text{Re} \{ \mathcal{A}\Phi^+ + \mathcal{B}\Phi^+(\alpha) \} = (\mathcal{A}I + \mathcal{B}W)\Phi^+ + (t\bar{\mathcal{A}}I + \alpha(t)\bar{\mathcal{B}}W)\Phi_1^- \quad . \quad (3.29)$$

Finalmente, como $\Phi_1^-(\infty) = 0$, podemos reescrever (3.29) na forma (3.28), que é suficiente para investigar a teoria de resolubilidade do problema (3.2).

Continuando a considerar o caso em que α é um deslocamento directo seja, agora, $\alpha(t) = \frac{t-\beta}{\beta t-1}$, com $|\beta| < 1$, um deslocamento linear fraccionário de Carleman

que preserva a orientação sobre \mathbb{T} . Recordemos que, conforme vimos na Secção 1.1, o deslocamento α admite a factorização $\alpha(t) = \alpha^+(t) t \alpha^-(t)$ (ver(1.6)), onde $\alpha^+(t) = \frac{\lambda}{\beta t - 1}$, $\alpha^-(t) = \frac{t - \beta}{\lambda t}$, $\lambda = \sqrt{1 - |\beta|^2}$. De acordo com a referida secção temos também que sendo U o operador definido por $(U\varphi)(t) = u(t) \varphi(\alpha(t))$, com $u(t) = -\alpha^+(t) = -\lambda(\beta t - 1)^{-1}$, são satisfeitas as condições:

$$SU = US \quad \text{e} \quad u(t) u(\alpha(t)) \equiv 1.$$

Então o operador integral singular (3.28) pode ser reescrito na forma

$$T = (\mathcal{A}I + u^{-1}\mathcal{B}U) \left[P_+ + \left(\tilde{a}I + \tilde{b}U \right) P_- \right],$$

com

$$\tilde{a}(t) = -\frac{t\theta(t)}{\Delta(t)} \quad \text{e} \quad \tilde{b}(t) = \frac{\alpha(t) u^{-1}(t) V(t)}{\Delta(t)}.$$

De acordo com a condição de Noether (3.8), temos $\Delta(t) \neq 0$ e, como $u(t) u(\alpha(t)) \equiv 1$, o operador funcional $T_1 = \mathcal{A}I + u^{-1}\mathcal{B}U$ é continuamente invertível. Portanto, resta estudar apenas o operador

$$\tilde{T} = P_+ + \tilde{\mathcal{A}}P_-, \quad \text{com} \quad \tilde{\mathcal{A}}(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \left[-t\theta(t)I + \alpha(t) u^{-1}(t) V(t) U \right].$$

Como vimos na Secção 1.3, e observando que, devido à igualdade $SU = US$, na identidade matricial (1.18) não aparece o operador compacto D , a teoria de resolubilidade do operador \tilde{T} pode ser obtida a partir da teoria de resolubilidade do operador integral singular sem deslocamento (ver (1.18) e (1.19))

$$\tilde{M} = P_+ + BP_-, \quad \text{com} \quad B = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} -t\theta(t) & \alpha(t) u^{-1}(t) V(t) \\ tu(t) V(\alpha(t)) & -\alpha(t) \theta(t) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Como $\det B = t\alpha(t) \frac{\overline{\Delta(t)}}{\Delta(t)} \neq 0$, a matriz B admite uma factorização com índices parciais $\kappa_1 \geq \kappa_2$, i.e.

$$B = B^+ \text{diag} \{t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}\} B^-,$$

e, de acordo com o Teorema 1.30, o estudo da teoria de resolubilidade deste problema reduz-se ao cálculo dos números κ_1, κ_2 e ε (usando a notação do referido teorema).

Para isso, comecemos por notar que a matriz B pode ser reescrita na forma

$$B = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} -\theta(t) & u^{-1}(t) V(t) \\ u(t) V(\alpha(t)) & -\overline{\theta(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \alpha(t) \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Recordando que $V = iV_0$ (com V_0 função real), vem que

$$B = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1}(t) V_0(t) & i\theta(t) \\ \frac{i\theta(t)}{i\theta(t)} & -u(t) V_0(\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \alpha(t) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Por sua vez a matriz

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} u^{-1}(t) V_0(t) & i\theta(t) \\ \frac{i\theta(t)}{i\theta(t)} & -u(t) V_0(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

pode ser representada na forma do seguinte produto de uma matriz Hermiteana por matrizes racionais

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} u^{-1}(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0(t) & i\theta(t) \\ i\theta(t) & -V_0(\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u(t) \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Aplicamos agora, à matriz de Hermite $B_0 = \begin{pmatrix} V_0(t) & i\theta(t) \\ i\theta(t) & -V_0(\alpha(t)) \end{pmatrix}$, a factorização de Litvinchuk-Spitkovsky que foi exposta na Secção 1.4. Antes de mais observamos que B_0 é uma matriz Hermiteana com determinante negativo. Com efeito, usando (3.25), temos

$$\Lambda(t) = |B_0| = -V_0(t)V_0(\alpha(t)) - |\theta(t)|^2 = V(t)V(\alpha(t)) - |\theta(t)|^2 = -|\Delta(t)|^2 < 0.$$

Portanto estamos em condições de aplicar a esta matriz a factorização de Litvinchuk-Spitkovsky mencionada. Para aplicar os Teoremas 1.32 e 1.33 é necessário que se tenha $-V_0(\alpha(t)) \neq 0$ sobre \mathbb{T} . Notamos ainda que, nesse caso, V_0 preserva o sinal sobre \mathbb{T} , consequentemente $V(t)V(\alpha(t)) < 0$ e, de (3.25), decorre que $|\Delta(t)| > |\theta(t)|$ sobre \mathbb{T} . Assim, existem as representações

$$\Lambda = -|\Lambda_+|^2 \text{ e } V_0^2 = |(V_0)_+|^2,$$

com $\Lambda_+^{\pm 1}$ e $(V_0)_+^{\pm 1}$ funções analíticas em $|z| < 1$ e contínuas em $|z| \leq 1$.

Introduzindo o operador de Hankel

$$H(\omega) = P_- \omega P_+,$$

com o símbolo $\omega = -\frac{i\theta(t)(V_0)_+(\alpha(t))}{V_0(\alpha(t))\Lambda_+(t)}$, de acordo com o Teorema 1.32, obtemos que os índices parciais κ_1 e κ_2 da matriz B_0 são l e $-l$, onde $l (\geq 0)$ é a multiplicidade do 1 como *número-s* do operador $H(\omega)$.

Por outro lado, aplicando o Teorema 1.33, temos que os índices parciais da matriz B_0 são $\pm m$ (ou seja $m = l$), onde m é o menor número de coincidências (contando com as multiplicidades) em $|z| < 1$ das funções racionais r_1 e r_2 , sem pólos sobre \mathbb{T} e sem pólos comuns em $|z| < 1$ e que satisfazem sobre \mathbb{T} as desigualdades

$$|i\theta(t) + V_0(\alpha(t))r_1(t)| < \sqrt{-\Lambda(t)} < |i\theta(t) + V_0(\alpha(t))r_2(t)|.$$

Acabamos assim de obter uma factorização da matriz B_0 , com $V_0 \neq 0$ sobre \mathbb{T} , na forma

$$B_0 = \begin{pmatrix} V_0(t) & i\theta(t) \\ i\theta(t) & -V_0(\alpha(t)) \end{pmatrix} = \chi^+ \begin{pmatrix} t^m & 0 \\ 0 & t^{-m} \end{pmatrix} \chi^-, \quad (3.34)$$

com χ^+ e χ^- funções matriciais analíticas em $|z| < 1$ e $|z| > 1$, respectivamente, e $\det \chi^\pm \neq 0$.

Procuramos agora obter os índices parciais da matriz B . Começamos por observar que, de acordo com (3.32) e (3.33), a matriz B pode ser reescrita na forma

$$B = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} iu^{-1}(t) & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} B_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \alpha(t) \end{pmatrix}.$$

Em seguida, considerando a factorização $\alpha(t) = \alpha^+(t)t\alpha^-(t)$ (ver(1.6)) e a igualdade $u(t) = -\alpha^+(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} B &= \frac{t}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} iu^{-1}(t) & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} B_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^+(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^+(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^-(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{t}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} iu^{-1}(t) & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} B_0 \begin{pmatrix} \alpha^+(t) & 0 \\ 0 & \alpha^+(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^-(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{t}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} \alpha^+(t) & 0 \\ 0 & \alpha^+(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iu^{-1}(t) & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} B_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^-(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{t}{\Delta(t)} R^+ B_0 R^- , \end{aligned}$$

onde $R^+ = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i\alpha^+(t) \end{pmatrix}$ é uma função matricial analítica em $|z| < 1$ e $\det R^+ \neq 0$ em $|z| < 1$ e $R^- = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^-(t) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é uma função matricial analítica em $|z| > 1$ e $\det R^- \neq 0$ em $|z| > 1$.

Resta-nos observar que, sendo $\kappa = \text{Ind}_{\mathbb{T}} \overline{\Delta(t)}$, a função Δ admite uma factorização da forma $\Delta(t) = \Delta^+(t)t^{-\kappa}\Delta^-(t)$ e a matriz B pode ser escrita na forma

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta^+(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta^+(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^\kappa & 0 \\ 0 & t^\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta^-(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta^-(t)} \end{pmatrix} R^+ B_0 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} R^- ,$$

concluindo-se, assim, que os índices parciais desta matriz são

$$\kappa_1 = \kappa + m + 1 \quad \text{e} \quad \kappa_2 = \kappa - m + 1 .$$

Notamos, ainda, que o índice total da matriz B é $2\kappa + 2$, conseqüentemente, de acordo com o Teorema 1.20, o índice do operador (3.28) é $\kappa + 1$, como era esperado, tendo em conta o Teorema 3.6.

Finalmente, usando o Teorema 1.30, segundo o qual

$$\dim \ker T = \begin{cases} 0 & \text{se } \kappa_1 \leq 0 \\ \left[\frac{\kappa_1}{2} + \frac{1-\varepsilon}{4} \right] & \text{se } \kappa_1 > 0, \kappa_2 \leq 0 \\ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} & \text{se } \kappa_2 > 0 \end{cases} ,$$

obtemos o seguinte resultado relativo à teoria de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento directo linear fraccionário de Carleman sobre \mathbb{T} .

Teorema 3.18 *Nas condições acima, sendo T o operador definido em (3.28), $\kappa_1 = \kappa + m + 1$ e $\kappa_2 = \kappa - m + 1$ os índices parciais da matriz B introduzida em (3.30), onde $\kappa = \text{Ind}_{\mathbb{T}} \Delta(t)$ e m é o número definido no Teorema 1.33, então os números l , de soluções linearmente independentes, e ρ , de condições de resolubilidade, do problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento linear fraccionário de Carleman tal que $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ e α preserva a orientação sobre \mathbb{T} são dados por:*

$$1. \quad l = \max(0, \kappa + 1) \quad \text{e} \quad \rho = \max(0, -\kappa - 1) , \quad \text{se } \kappa_1 \leq 0 \text{ ou } \kappa_2 > 0,$$

2. $l = \dim \ker T = \frac{\kappa_1}{2} = \frac{\kappa+m+1}{2}$ e $\rho = \frac{-\kappa+m-1}{2}$, se $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 \leq 0$ e κ_1 é par,
3. $l = \left[\frac{\kappa_1}{2} + \frac{1-\varepsilon}{4} \right] = \begin{cases} \frac{\kappa+m}{2} & , \text{ se } \varepsilon = 1 \\ \frac{\kappa+m}{2} + 1 & , \text{ se } \varepsilon = -1 \end{cases}$ e $\rho = \begin{cases} \frac{-\kappa+m}{2} - 1 & , \text{ se } \varepsilon = 1 \\ \frac{-\kappa+m}{2} & , \text{ se } \varepsilon = -1 \end{cases}$,
se $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 \leq 0$ e κ_1 é ímpar, onde $\varepsilon = \pm 1$ é o número que resulta do Lema 1.22.

Voltamos agora a considerar os casos particulares do problema de limite de Hilbert generalizado que apresentámos no início desta secção. Estes problemas foram considerados sobre uma curva simples fechada de Lyapunov Γ qualquer e foram resolvidos pelo método de “eliminação de incógnitas” que consistia, essencialmente, em reduzir os referidos problemas a problemas de limite binomiais. Aqui consideramos estes mesmos problemas sobre \mathbb{T} e procuramos resolvê-los pelo “método matricial” exposto acima. Com efeito, para estes dois casos particulares degenerados do problema (3.2) com um deslocamento directo, as matrizes correspondentes são diagonais, logo podemos usar os raciocínios expostos na Subsecção 1.3.3 para obter os índices parciais das mesmas e, como consequência, os números de defeito, l e ρ , do problema inicial.

Começemos pelo caso particular do problema (3.2) em que $\alpha = \alpha_+$, $\Delta(t) \neq 0$ e $\theta(t) \equiv 0$. Verificamos que, neste caso a matriz B introduzida em (3.30) toma a forma

$$B = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} 0 & F(t) \\ F(\alpha(t)) & 0 \end{pmatrix}, \text{ com } F(t) = \alpha(t) u^{-1}(t) V(t).$$

Observando que $\text{Ind}_{\mathbb{T}} F(t) = 1$ e usando um raciocínio análogo ao que utilizamos para factorizar a matriz (1.67), obtemos que os índices parciais da matriz B são ambos iguais a $\kappa + 1$, com $\kappa = \text{Ind}_{\mathbb{T}} \Delta(t)$. Assim, segundo a notação usada no Teorema 3.18, temos, neste caso, $m = 0$ e, de acordo com o ponto 1. do referido teorema obtemos que os números de defeito do problema de limite de Hilbert generalizado em estudo são $l = \max(0, \kappa + 1)$ e $\rho = \max(0, -\kappa - 1)$, resultado este que já era conhecido do Teorema 3.14.

No outro caso degenerado do problema (3.2) que foi considerado tínhamos $\alpha = \alpha_+$, $\Delta(t) \neq 0$ e $V(t) \equiv 0$, obtendo-se, assim,

$$B = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} -t\theta(t) & 0 \\ 0 & -\alpha(t)\overline{\theta(t)} \end{pmatrix}.$$

Recordando que, de acordo com a primeira igualdade em (3.26), $\{\arg \theta(t)\}_{\mathbb{T}} = 0$, obtemos que os índices parciais da matriz B são ambos iguais a $\kappa + 1$, com $\kappa = \text{Ind}_{\mathbb{T}} \Delta(t)$ e, tal como no caso anterior, os números de defeito do problema de limite de Hilbert generalizado em questão são $l = \max(0, \kappa + 1)$ e $\rho = \max(0, -\kappa - 1)$, tal como já tinham sido obtidos no Teorema 3.16.

Terminamos o estudo do problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento directo apresentando um exemplo para o qual, em geral, os números de defeito l e ρ não satisfazem as fórmulas de Gakhov-Coburn (ver (III) na Introdução), ou seja, nem sempre se obtém

$$l = \max(0, I) \quad \text{e} \quad \rho = \max(0, -I), \quad (3.35)$$

onde I é o índice do problema.

Exemplo 3.19 Consideremos o problema de limite de Hilbert generalizado

$$\operatorname{Re} \{t^{-k} [u(t) + iv(-t)]\} = h(t) \quad \text{sobre } \mathbb{T}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \quad (3.36)$$

Começamos por observar que, sendo $t = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, com $\varphi \in [0, 2\pi[$, temos que $t^k = \cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)$ e o problema (3.36) pode escrever-se na forma

$$\operatorname{Re} \{ \cos(k\varphi) \Phi^+(t) - i \sin(k\varphi) \Phi^+(\alpha(t)) \} = h(t) \quad , \quad t = e^{i\varphi} \in \mathbb{T},$$

onde $\alpha(t) = -t$ é um caso particular ($\beta = 0$) de um deslocamento directo linear fraccionário de Carleman e $\Phi^+(t) = u(t) + iv(t)$. Assim, de acordo com as notações de (3.2), neste caso temos $\mathcal{A}(t) = \cos(k\varphi) = \operatorname{Re} t^{-k}$ e $\mathcal{B}(t) = -i \sin(k\varphi) = i \operatorname{Im} t^{-k}$. Consequentemente $\mathcal{A}(-t) = (-1)^k \cos(k\varphi)$ e $\mathcal{B}(-t) = -i(-1)^k \sin(k\varphi)$, vindo que

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \mathcal{A}(t)\mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t)\mathcal{B}(\alpha(t)) = (-1)^k, \\ \theta(t) &= \overline{\mathcal{A}(t)}\mathcal{A}(\alpha(t)) - \mathcal{B}(t)\overline{\mathcal{B}(\alpha(t))} = (-1)^k \cos(2k\varphi) = (-1)^k \frac{t^{2k} + t^{-2k}}{2}, \\ V(t) &= \mathcal{B}(t)\overline{\mathcal{A}(\alpha(t))} - \overline{\mathcal{B}(t)}\mathcal{A}(\alpha(t)) = -i(-1)^k \sin(2k\varphi) = -(-1)^k \frac{t^{2k} - t^{-2k}}{2}. \end{aligned}$$

Concluindo-se, desde já, que o problema (3.36) é Noetheriano ($\Delta(t) \neq 0$) e, como $\kappa = \operatorname{Ind}_{\mathbb{T}} \overline{\Delta(t)} = 0$, o seu índice é dado por $I = \kappa + 1 = 1$. Obtemos, ainda, que, para este exemplo, a matriz B (ver (3.31)) toma a seguinte forma

$$B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^{2k} + t^{-2k} & t^{2k} - t^{-2k} \\ t^{2k} - t^{-2k} & t^{2k} + t^{-2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix},$$

e, observando que a primeira destas matrizes é circulante (ver por exemplo [29], página 159), concluímos que esta admite a factorização

$$\begin{pmatrix} t^{2k} + t^{-2k} & t^{2k} - t^{-2k} \\ t^{2k} - t^{-2k} & t^{2k} + t^{-2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{2k} & 0 \\ 0 & t^{-2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{2k} & 0 \\ 0 & t^{-2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{2k+1} & 0 \\ 0 & t^{-2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Portanto, os índices parciais da função matricial B são dados por:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 2k + 1 \quad \text{e} \quad \kappa_2 = -2k + 1, \quad \text{se } k \geq 0 \\ \kappa_1 &= -2k + 1 \quad \text{e} \quad \kappa_2 = 2k + 1, \quad \text{se } k < 0. \end{aligned}$$

Ou seja, usando a notação do Teorema 3.18, temos, para este exemplo,

$$\kappa = \operatorname{Ind}_{\mathbb{T}} \overline{\Delta(t)} = 0 \quad \text{e} \quad m = |2k|.$$

Resta-nos calcular o número ε .

Começamos por considerar o caso $k \geq 0$. Definindo $B_+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B_- = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, decorre do Lema 1.22 que o número ε pode ser calculado a partir da igualdade

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,p} = \Lambda_+^{-1} B_+^{-1}(\alpha) e B_+, \quad (3.39)$$

onde usamos a notação que foi introduzida no referido lema. Este cálculo dá-nos que $\varepsilon = -1$. Assim, estamos nas condições dos pontos 1. ou 3. do Teorema 3.18, conforme $k = 0$ ou $k > 0$, respectivamente, e obtemos que, em qualquer um destes casos, o número de soluções linearmente independentes do problema de limite de Hilbert generalizado (3.36) é dado por $l = k + 1$ e este problema é solúvel se forem satisfeitas $\rho = k$ condições de resolubilidade.

Passamos agora ao caso $k < 0$. Começamos por obter uma factorização da matriz B com os índices parciais crescentes. Para isso, basta notar que

$$\begin{pmatrix} t^{2k+1} & 0 \\ 0 & t^{-2k+1} \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} t^{-2k+1} & 0 \\ 0 & t^{2k+1} \end{pmatrix} e, \quad \text{com } e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Substituindo na factorização (3.38) obtemos

$$B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-2k+1} & 0 \\ 0 & t^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso temos, então, $B_+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B_- = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Assim, usando novamente a igualdade (3.39) obtemos $\varepsilon = 1$. E, de acordo com o ponto 3. do Teorema 3.18, concluímos que, se $k < 0$, então os números de defeito do problema (3.36) são dados por $l = -k$ e $\rho = -k - 1$.

Observação 3.20 No exemplo anterior as fórmulas de Gakhov-Coburn (3.35) só são satisfeitas se $k = 0$ ou $k = -1$ e apenas nestes dois casos o problema não homogéneo (3.36) é solúvel incondicionalmente.

O exemplo que acabamos de expor usando o “método matricial” foi considerado pela primeira vez em [13] por outro método (ver também [26], Exemplo 23.1).

3.2.2 Teoria de resolubilidade no caso de um deslocamento inverso

Passamos agora ao estudo da teoria de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento inverso de Carleman ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$).

Começamos por notar que, usando as designações introduzidas no início desta secção, neste caso, a condição de Noether (3.24) pode ser escrita na forma $\theta(t) \neq 0$, além disso, agora, $\kappa = \frac{1}{2\pi} \{\arg \theta(t)\}_\Gamma = \text{Ind}_\Gamma \theta(t)$ e o índice do problema de limite de Hilbert generalizado (ver Teorema 3.6) é dado pela fórmula $I = \frac{1}{2\pi} \{\arg \theta(t)\}_\Gamma + 1 = \kappa + 1$.

Tal como na subsecção anterior, começamos por utilizar o método de “eliminação de incógnitas” para obter a teoria de resolubilidade de um caso particular degenerado

do problema (3.2) com um deslocamento inverso que se reduz a um problema de Hilbert clássico, sendo, por isso, possível obter os números de defeito l e ρ .

Consideremos, então, o problema (3.2) em que $\alpha = \alpha_-$, $\theta(t) \neq 0$ e $V(t) \equiv 0$. Das duas últimas condições e da igualdade (3.25) decorre que $\Delta(t) \neq 0$ e, de forma análoga à que foi utilizada quando consideramos o segundo caso degenerado do problema de Hilbert generalizado com um deslocamento directo, supondo adicionalmente que $\mathcal{A}(t) \neq 0$ sobre Γ , obtemos

$$\theta(t) = \frac{\mathcal{A}(\alpha(t))}{\mathcal{A}(\alpha(t))} \overline{\Delta(t)}.$$

Assim, usando o facto de que, de acordo com a segunda igualdade em (3.26), se $\alpha = \alpha_-$, então $\{\arg \Delta(t)\}_\Gamma = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2\pi} \{\arg \theta(t)\}_\Gamma = -\frac{1}{\pi} \{\arg \mathcal{A}(t)\}_\Gamma - \frac{1}{2\pi} \{\arg \Delta(t)\}_\Gamma \\ &= -\frac{1}{\pi} \{\arg \mathcal{A}(t)\}_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{A}(t)} \right\}_\Gamma, \end{aligned}$$

e a fórmula do índice (ver Teorema 3.6) toma a forma

$$I = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{A}(t)} \right\}_\Gamma + 1.$$

Tal como no caso de um deslocamento directo, utilizando as condições $\theta(t) \neq 0$ e $V(t) \equiv 0$ é possível reduzir o problema (3.2) ao problema de limite de Hilbert equivalente

$$\Phi^+(t) = -\frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{A}(t)} \overline{\Phi^+(t)} + \frac{\overline{\mathcal{A}(\alpha(t))}h(t) - \overline{\mathcal{B}(t)}h(\alpha(t))}{\overline{\theta(t)}}.$$

Temos

$$\kappa = I_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\overline{\mathcal{A}(t)}}{\mathcal{A}(t)} \right\}_\Gamma = \frac{1}{\pi} \{\arg(a(t) + ic(t))\}_\Gamma,$$

Assim, e tendo em conta o Teorema 3.16, obtemos o seguinte resultado relativamente a um problema de limite de Hilbert generalizado.

Teorema 3.21 *Se forem satisfeitas as condições $V(t) \equiv 0$, $\mathcal{A}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, e uma das condições (equivalentes) $\theta(t) \neq 0$ ou $\Delta(t) \neq 0$, então os números de soluções linearmente independentes e de condições de resolubilidade de um problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento de Carleman de ordem 2 ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$) exprimem-se pelas relações*

$$l = \max(0, \kappa + 1) \quad , \quad \rho = \max(0, -\kappa - 1).$$

Observamos que o raciocínio exposto no Exemplo 3.17 em relação ao problema de Hilbert clássico pode ser repetido aqui. Por outras palavras, o problema de Hilbert clássico, considerado na Secção 2.1, pode ser visto como um caso particular

do problema de limite (3.2) (com $\mathcal{B} \equiv 0$), obtendo-se a partir da condição $\Delta(t) \neq 0$ e do Teorema 3.21, a condição de Noether e os números de defeito já conhecidos para esse problema.

Em seguida consideramos outro caso particular degenerado do problema (3.2). Mais precisamente, seja agora α é um deslocamento inverso de Carleman tal que $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ e $\Delta(t) \equiv 0$. Neste caso, da condição $\Delta(t) \equiv 0$ resulta que $\mathcal{A}(t_i) = \pm \mathcal{B}(t_i)$, nos pontos fixos t_i , $i = 1, 2$, do deslocamento α . Consequentemente a condição de Noether $\theta(t) \neq 0$ não é satisfeita nos referidos pontos fixos. Assim, visto que este caso particular é um problema não Noetheriano, o seu estudo está fora dos objectivos deste trabalho.

Prosseguimos o estudo da teoria de resolubilidade do problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento inverso, passando agora a considerar o caso $\Gamma = \mathbb{T}$ e impondo restrições ao deslocamento e não aos coeficientes do referido problema. Mais precisamente, consideramos agora o caso em que α é um deslocamento linear fraccionário de Carleman ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$) que muda a orientação sobre \mathbb{T} , i.e.

$$\alpha(t) = \frac{t - \beta}{\beta t - 1}, \text{ com } |\beta| > 1. \quad (3.40)$$

Antes de mais recordamos que (ver Secção 1.1) o deslocamento α pode ser factorizado na forma (ver(1.6))

$$\alpha(t) = \alpha^+(t) t^{-1} \alpha^-(t),$$

com $\alpha^+(t) = \frac{t - \beta}{i\lambda}$, $\alpha^-(t) = \frac{i\lambda t}{\beta t - 1}$, onde $\lambda = \sqrt{|\beta|^2 - 1}$. Além disso, para um deslocamento deste tipo, sendo U o operador, definido por $(U\varphi)(t) = u(t)\varphi(\alpha(t))$, com $u(t) = \alpha^-(t)t^{-1} = \frac{i\lambda}{\beta t - 1}$, satisfazem-se as igualdades

$$US = -SU \quad \text{e} \quad u(t)u(\alpha(t)) \equiv 1.$$

Tal como foi esclarecido na Subsecção 3.2.1, como $\Gamma = \mathbb{T}$, o estudo da teoria de resolubilidade do problema (3.2) reduz-se ao estudo da teoria de resolubilidade do operador (3.28), o qual pode ser escrito na forma

$$T = (\mathcal{A}(t)I + u^{-1}(t)\mathcal{B}(t)U)P_+ - (\overline{t\mathcal{A}(t)}I + \alpha(t)u^{-1}(t)\overline{\mathcal{B}(t)U})P_-. \quad (3.41)$$

Por outro lado, conforme foi exposto na Secção 1.3, e uma vez que, devido à igualdade $US = -SU$, a identidade matricial (1.18) obtém-se sem o operador compacto D , a teoria de resolubilidade do operador T pode ser obtida a partir da teoria de resolubilidade do operador integral singular sem deslocamento (ver (1.18) e (1.20))

$$M = AP_+ + BP_-, \quad \text{com}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(t) & \alpha(t)u^{-1}(t)\overline{\mathcal{B}(t)} \\ u(t)\mathcal{B}(\alpha(t)) & \alpha(t)\overline{\mathcal{A}(\alpha(t))} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} \overline{t\mathcal{A}(t)} & u^{-1}(t)\mathcal{B}(t) \\ tu(t)\overline{\mathcal{B}(\alpha(t))} & \mathcal{A}(\alpha(t)) \end{pmatrix}.$$

Devido à condição de Noether $\theta(t) \neq 0$, temos que $\det A = \alpha(t)\overline{\theta(t)} \neq 0$, logo a matriz A é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha(t)\overline{\theta(t)}} \begin{pmatrix} \alpha(t)\overline{\mathcal{A}(\alpha(t))} & -\alpha(t)u^{-1}(t)\overline{\mathcal{B}(t)} \\ -u(t)\overline{\mathcal{B}(\alpha(t))} & \mathcal{A}(t) \end{pmatrix}.$$

Assim, é suficiente estudar a teoria de resolubilidade do operador

$$\widetilde{M} = P_+ + CP_- , \quad \text{com} \quad (3.42)$$

$$C = A^{-1}B = \frac{1}{\alpha(t)\overline{\theta(t)}} \begin{pmatrix} t\alpha(t)\overline{\Delta(t)} & u^{-1}(t)\alpha(t)V(t) \\ -tu(t)V(\alpha(t)) & \Delta(t) \end{pmatrix} .$$

Observamos agora que $\det C = \frac{t\theta(t)}{\alpha(t)\overline{\theta(t)}} \neq 0$ e que, de acordo com o Teorema 1.31, a teoria de resolubilidade do operador T obtém-se completamente a partir de uma factorização da matriz C na forma (1.45).

Passamos, então, à obtenção dessa factorização. Começamos por notar que

$$C = \frac{1}{\alpha(t)\overline{\theta(t)}} \begin{pmatrix} \alpha(t)u^{-1}(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Delta(t)} & V(t) \\ -V(\alpha(t)) & \Delta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tu(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

agora, recordando que $V = iV_0$ (com V_0 função real), escrevemos

$$C = \frac{1}{\alpha(t)\overline{\theta(t)}} \begin{pmatrix} i\alpha(t)u^{-1}(t) & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0(t) & i\overline{\Delta(t)} \\ i\Delta(t) & V_0(\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tu(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

onde $C_0 = \begin{pmatrix} V_0(t) & i\overline{\Delta(t)} \\ i\Delta(t) & V_0(\alpha(t)) \end{pmatrix}$ é uma matriz Hermiteana com determinante

$$|C_0| = V_0(t)V_0(\alpha(t)) - |\Delta(t)|^2 = -V(t)V(\alpha(t)) - |\Delta(t)|^2 = -|\theta(t)|^2 < 0 ,$$

onde usamos (3.25).

Agora, analogamente ao que acontecia com a matriz B_0 obtida no caso de um deslocamento directo, conclui-se que é válida para a matriz C_0 a factorização de Litvinchuk-Spitkovsky que foi exposta na Secção 1.4. Mais explicitamente, supondo adicionalmente que $V_0(\alpha(t)) \neq 0$, $t \in \mathbb{T}$ e aplicando à matriz C_0 o Teorema 1.33 concluímos que os índices parciais da matriz C_0 são $\pm m$, onde m é o menor número de coincidências (contando com as multiplicidades) em $|z| < 1$ das funções racionais r_1 e r_2 , sem pólos sobre \mathbb{T} e sem pólos comuns em $|z| < 1$ e que satisfazem sobre \mathbb{T} as desigualdades

$$\left| i\overline{\Delta(t)} - V_0(\alpha(t))r_1(t) \right| < \sqrt{-\Lambda(t)} < \left| i\overline{\Delta(t)} - V_0(\alpha(t))r_2(t) \right| , \quad \text{com } \Lambda(t) = |C_0| .$$

Assim, a matriz C_0 pode ser representada na forma

$$C_0 = \begin{pmatrix} V_0(t) & i\overline{\Delta(t)} \\ i\Delta(t) & V_0(\alpha(t)) \end{pmatrix} = C_0^+ \begin{pmatrix} t^m & 0 \\ 0 & t^{-m} \end{pmatrix} C_0^- , \quad (3.44)$$

com C_0^+ e C_0^- funções matriciais analíticas em $|z| < 1$ e $|z| > 1$, respectivamente, e $\det C_0^\pm \neq 0$.

Notemos que aqui poderíamos também ter aplicado o Teorema 1.32.

Voltando a (3.43), e usando a factorização $\alpha(t) = \alpha^+(t)t^{-1}\alpha^-(t)$ e o facto de que $u(t) = \alpha^-(t)t^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\alpha(t)\overline{\theta(t)}} \begin{pmatrix} i\alpha^+(t) & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} C_0^+ \begin{pmatrix} t^m & 0 \\ 0 & t^{-m} \end{pmatrix} C_0^- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^-(t) & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha(t)\overline{\theta(t)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha(t)\overline{\theta(t)}} \end{pmatrix} R^+ \begin{pmatrix} t^m & 0 \\ 0 & t^{-m} \end{pmatrix} R^- , \end{aligned}$$

onde $R^+ = \begin{pmatrix} i\alpha^+(t) & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} C_0^+$ é uma função matricial analítica em $|z| < 1$ e $\det R^+ \neq 0$ em $|z| < 1$ e $R^- = C_0^- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^-(t) & 0 \end{pmatrix}$ é uma função matricial analítica em $|z| > 1$ e $\det R^- \neq 0$ em $|z| > 1$ e a primeira matriz admite a factorização

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha(t)\theta(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha(t)\theta(t)} \end{pmatrix} = t^{\kappa+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^+(t)\theta^+(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^+(t)\theta^+(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^-(t)\theta^-(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^-(t)\theta^-(t)} \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

sendo $\kappa = \text{Ind}_{\mathbb{T}}\theta(t)$ e $\theta(t) = \theta^+(t)t^\kappa\theta^-(t)$ uma factorização da função θ .

Obtendo-se, finalmente, que

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^+(t)\theta^+(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^+(t)\theta^+(t)} \end{pmatrix} R^+ \begin{pmatrix} t^{\kappa+1+m} & 0 \\ 0 & t^{\kappa+1-m} \end{pmatrix} R^- \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^-(t)\theta^-(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^-(t)\theta^-(t)} \end{pmatrix},$$

o que nos permite concluir que os índices parciais da matriz C são

$$\kappa_1 = \kappa + 1 + m \quad \text{e} \quad \kappa_2 = \kappa + 1 - m.$$

Resta-nos observar que, como já sabemos do Teorema 3.6, obtemos $\text{ind}T = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{2\kappa + 2}{2} = \kappa + 1$.

Estamos agora em condições de aplicar o Teorema 1.31, segundo o qual

$$\dim \ker T = \begin{cases} 0 & \text{se } \kappa_1 \leq 0 \\ \frac{\kappa_1}{2} & \text{se } \kappa_1 > 0 \text{ e } \kappa_2 \leq 0 \text{ e } \kappa_1 \text{ é par} \\ \frac{\kappa_1 - \varepsilon}{2} & \text{se } \kappa_1 > 0 \text{ e } \kappa_2 \leq 0 \text{ e } \kappa_1 \text{ é ímpar} \\ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} & \text{se } \kappa_2 > 0 \end{cases},$$

onde κ_1 e κ_2 ($\kappa_1 \geq \kappa_2$) são os índices parciais da função matricial C e o número $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ é calculado a partir da factorização (1.45) da matriz C usando a igualdade

$$\Lambda_+ C^- (\alpha) e C^+ = \begin{pmatrix} \varepsilon & P_{\kappa_1 - \kappa_2}(t) \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

onde $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Lambda_+(t) = \text{diag}\{(\alpha^+(t))^{\kappa_1}, (\alpha^+(t))^{\kappa_2}\} = \text{diag}\left\{\left(\frac{t-\beta}{i\lambda}\right)^{\kappa_1}, \left(\frac{t-\beta}{i\lambda}\right)^{\kappa_2}\right\}$ e $P_{\kappa_1 - \kappa_2}(t)$ é um polinómio de grau não superior a $\kappa_1 - \kappa_2$ que satisfaz a condição $P_{\kappa_1 - \kappa_2}(\alpha(t)) = u^{\kappa_1 - \kappa_2}(t) P_{\kappa_1 - \kappa_2}(t)$.

Obtemos, desta forma, o seguinte resultado acerca dos números de defeito do problema de limite de Hilbert generalizado (3.2).

Teorema 3.22 *Nas condições anteriores, sendo T o operador definido em (3.41), $\kappa_1 = \kappa + 1 + m$ e $\kappa_2 = \kappa + 1 - m$ os índices parciais da matriz C obtida em (3.42), onde $\kappa = \text{Ind}_{\mathbb{T}}\theta(t)$ e m é o número definido no Teorema 1.33, se $I = \text{ind}T = \kappa + 1$, então os números l , de soluções linearmente independentes, e ρ , de condições de resolubilidade, do problema de limite de Hilbert generalizado (3.2) com um deslocamento linear fraccionário de Carleman de ordem 2 da forma (3.40), que muda a orientação sobre \mathbb{T} , são dados por:*

1. $l = \max(0, I)$ e $\rho = \max(0, -I)$, se $\kappa_1 \leq 0$ ou $\kappa_2 > 0$,
2. $l = \frac{\kappa_1}{2} = \frac{\kappa+1+m}{2}$ e $\rho = \frac{-\kappa-1+m}{2}$, se $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 \leq 0$ e κ_1 é par,
3. $l = \frac{\kappa_1-\varepsilon}{2} = \frac{\kappa+1+m-\varepsilon}{2}$ e $\rho = \frac{-\kappa-1+m-\varepsilon}{2}$, se $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 \leq 0$ e κ_1 é ímpar.

Aplicamos agora o “método matricial” que acabamos de expor ao caso particular do problema de limite de Hilbert generalizado com um deslocamento inverso que foi considerado no Teorema 3.21.

Assim, impondo a condição $V(t) \equiv 0$, para este caso degenerado a matriz C , introduzida em (3.42), toma a forma

$$C = \frac{1}{\alpha(t)\overline{\theta(t)}} \begin{pmatrix} t\alpha(t)\overline{\Delta(t)} & 0 \\ 0 & \Delta(t) \end{pmatrix}.$$

Recordando que, de acordo com a segunda igualdade em (3.26), $\{\arg \Delta(t)\}_\Gamma = 0$, raciocinando como na Subsecção 1.3.3, concluímos que os índices parciais da matriz $\begin{pmatrix} t\alpha(t)\overline{\Delta(t)} & 0 \\ 0 & \Delta(t) \end{pmatrix}$ são ambos nulos, consequentemente os índices parciais da matriz C são $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa + 1$, com $\kappa = \text{Ind}_{\mathbb{T}}\theta(t)$, logo, usando a notação do Teorema 3.22, aqui $m = 0$ e esse mesmo teorema conduz-nos ao resultado que já foi apresentado no Teorema 3.21, ou seja, obtemos que os números de defeito deste caso particular do problema de limite de Hilbert generalizado são $l = \max(0, \kappa + 1)$ e $\rho = \max(0, -\kappa - 1)$.

Passamos agora a considerar o deslocamento $\alpha(t) = \frac{1}{t}$. Antes de mais, aqui é conveniente observar que este é um deslocamento inverso de Carleman ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$) sobre \mathbb{T} , mas não é um caso particular de um deslocamento linear fraccionário da forma (3.40).

Juntamente com este deslocamento, consideramos o operador U definido por $(U\varphi)(t) = \frac{1}{t}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ e usualmente designado por “flip operator”. Notamos que facilmente se verifica que todos os resultados obtidos acima, quando consideramos um deslocamento inverso linear fraccionário de Carleman da forma (3.40), se mantêm válidos neste caso. Com efeito, comparando com o caso que acabamos de estudar de um deslocamento linear fraccionário (3.40), observamos que nada se altera se considerarmos, agora, $u(t) = t^{-1}$ e $\alpha(t) = t^{-1}$ (ou seja, $\alpha^+(t) = \alpha^-(t) = 1$). Desta forma obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.23 *Sendo κ, m, κ_1 e κ_2 definidos como no Teorema 3.22, os números de defeito l e ρ do problema de limite de Hilbert generalizado*

$$\text{Re} \{ \mathcal{A}(t) \Phi^+(t) + \mathcal{B}(t) \Phi^+(\alpha(t)) \} = h(t) \quad \text{sobre } \mathbb{T}, \quad (3.47)$$

com $\alpha(t) = \frac{1}{t}$, são dados por

1. $l = \max(0, \kappa + 1)$ e $\rho = \max(0, -\kappa - 1)$, se $\kappa_1 \leq 0$ ou $\kappa_2 > 0$,
2. $l = \frac{\kappa_1}{2} = \frac{\kappa+1+m}{2}$ e $\rho = \frac{-\kappa-1+m}{2}$, se $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 \leq 0$ e κ_1 é par,
3. $l = \frac{\kappa_1-\varepsilon}{2} = \frac{\kappa+1+m-\varepsilon}{2}$ e $\rho = \frac{-\kappa-1+m-\varepsilon}{2}$, se $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 \leq 0$ e κ_1 é ímpar, onde $\varepsilon = \pm 1$ é calculado a partir da igualdade (3.46).

Prova. Basta observar que, de acordo com as observações feitas acima, sendo U o operador definido por $(U\varphi)(t) = \frac{1}{t}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$, a teoria de resolubilidade do problema (3.47) pode ser obtida a partir da teoria de resolubilidade do operador integral singular com deslocamento

$$T = (\mathcal{A}(t)I + t\mathcal{B}(t)U)P_+ - \left(\overline{t\mathcal{A}(t)}I + \overline{\mathcal{B}(t)U}\right)P_-,$$

cujos números de defeito podem ser obtidos, usando o Teorema 3.22, a partir de uma fatorização da matriz (ver(3.42))

$$C = \frac{t}{\theta(t)} \begin{pmatrix} \overline{\Delta(t)} & V(t) \\ -V(\alpha(t)) & \Delta(t) \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Recordando que $V = iV_0$ obtemos que

$$C = \frac{t}{\theta(t)} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0(t) & \overline{i\Delta(t)} \\ i\Delta(t) & V_0(\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, usando as fatorizações (3.44) e (3.45), vem que

$$C = \begin{pmatrix} \frac{i}{\theta^+(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\theta^+(t)} \end{pmatrix} C_0^+ \begin{pmatrix} t^{\kappa+1+m} & 0 \\ 0 & t^{\kappa+1-m} \end{pmatrix} C_0^- \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\theta^-(t)} \\ \frac{1}{\theta^-(t)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

onde $\kappa = \text{Ind}_{\mathbb{T}}\theta(t)$ e $\theta(t) = \theta^+(t)t^\kappa\theta^-(t)$ é uma fatorização da função θ , concluindo-se que os índices parciais da matriz C são $\kappa_1 = \kappa + 1 + m$ e $\kappa_2 = \kappa + 1 - m$.

Finalmente, tendo em conta as observações feitas antes deste exemplo e aplicando agora o Teorema 3.22, obtemos o resultado. Temos ainda que, neste caso, as matrizes \mathcal{C}^+ e \mathcal{C}^- (ver (3.46)) são dadas por

$$\mathcal{C}^+ = \begin{pmatrix} \frac{i}{\theta^+(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\theta^+(t)} \end{pmatrix} C_0^+ \quad \text{e} \quad \mathcal{C}^- = C_0^- \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\theta^-(t)} \\ \frac{1}{\theta^-(t)} & 0 \end{pmatrix},$$

de acordo com a fatorização (3.49). ■

Finalizamos apresentando um exemplo do problema de limite de Hilbert generalizado com o deslocamento $\alpha(t) = \frac{1}{t}$ no qual, em geral e analogamente ao que se verificava no Exemplo 3.19, os números de defeito l e ρ não satisfazem as fórmulas de Gakhov-Coburn (3.35).

Exemplo 3.24 Consideremos o problema de limite de Hilbert generalizado

$$\text{Re} \left\{ t^{-k} \left[u(t) + iv \left(\frac{1}{t} \right) \right] \right\} = h(t) \quad \text{sobre } \mathbb{T}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \quad (3.50)$$

Tal como no Exemplo 3.19, o problema (3.50) pode ser escrito na forma (3.2) com $\alpha(t) = \frac{1}{t}$, $\mathcal{A}(t) = \cos(k\varphi) = \text{Re}t^{-k}$ e $\mathcal{B}(t) = -i\sin(k\varphi) = i\text{Im}t^{-k}$, onde $t = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi[$. Assim, $\mathcal{A}\left(\frac{1}{t}\right) = \cos(k\varphi)$ e $\mathcal{B}\left(\frac{1}{t}\right) = i\sin(k\varphi)$,

obtendo-se que

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \overline{\mathcal{A}(t)}\mathcal{A}\left(\frac{1}{t}\right) - \mathcal{B}(t)\overline{\mathcal{B}\left(\frac{1}{t}\right)} = 1, \\ \Delta(t) &= \mathcal{A}(t)\mathcal{A}\left(\frac{1}{t}\right) - \mathcal{B}(t)\mathcal{B}\left(\frac{1}{t}\right) = \cos(2k\varphi) = \frac{t^{2k} + t^{-2k}}{2}, \\ V(t) &= \mathcal{B}(t)\overline{\mathcal{A}\left(\frac{1}{t}\right)} - \overline{\mathcal{B}(t)}\mathcal{A}\left(\frac{1}{t}\right) = -i\sin(2k\varphi) = -\frac{t^{2k} - t^{-2k}}{2}.\end{aligned}$$

Notamos que, em particular, $\theta(t) = 1 \neq 0$, ou seja, é satisfeita a condição de Noether do problema (3.50). Além disso, sendo $\kappa = \text{Ind}_{\top}\theta(t) = 0$, concluímos que o índice deste problema é $I = \kappa + 1 = 1$.

Observamos também que, sendo U o operador definido por $(U\varphi)(t) = \frac{1}{t}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$, de acordo com as observações feitas antes do Teorema 3.23 e como vimos na prova desse mesmo teorema, a matriz C (ver(3.48)) correspondente ao problema (3.50) escreve-se na forma

$$\begin{aligned}C &= \frac{t}{2} \begin{pmatrix} t^{2k} + t^{-2k} & -(t^{2k} - t^{-2k}) \\ -(t^{2k} - t^{-2k}) & t^{2k} + t^{-2k} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{2k} + t^{-2k} & t^{2k} - t^{-2k} \\ t^{2k} - t^{-2k} & t^{2k} + t^{-2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

e, usando a factorização (3.37), obtemos a seguinte factorização da matriz C

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{2k+1} & 0 \\ 0 & t^{-2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Concluimos, deste modo, que os índices parciais da matriz C são:

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= 2k + 1 \quad \text{e} \quad \kappa_2 = -2k + 1, \quad \text{se } k \geq 0 \\ \kappa_1 &= -2k + 1 \quad \text{e} \quad \kappa_2 = 2k + 1, \quad \text{se } k < 0.\end{aligned}$$

Portanto, de acordo com a notação usada no Teorema 3.23, agora temos

$$\kappa = \text{Ind}_{\top}\theta(t) = 0 \quad \text{e} \quad m = |2k|.$$

Passamos, em seguida, ao cálculo do número ε .

Se $k \geq 0$, designando $C^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $C^- = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e usando a igualdade (3.46) (aqui com $\alpha^+(t) = \alpha^-(t) = 1$) obtemos $\varepsilon = -1$. Agora, aplicando os resultados apresentados nos pontos 1. (se $k = 0$) e 3. (se $k > 0$) do Teorema 3.23, concluímos que o problema homogéneo correspondente ao problema (3.50) tem $\kappa + 1$ soluções linearmente independentes ($l = \kappa + 1$) e o problema não homogéneo (3.50) é solúvel se e só se forem satisfeitas k condições de resolubilidade ($\rho = \kappa$).

Quanto ao caso $k < 0$, um procedimento análogo ao que foi utilizado no caso correspondente do Exemplo 3.19 conduz-nos à seguinte factorização da matriz C com os índices parciais crescentes

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-2k+1} & 0 \\ 0 & t^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Então, neste caso, $C^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 1$. Assim, estamos nas condições do ponto 3. do Teorema 3.23, e obtemos que, se $k < 0$, o problema (3.50) é solúvel se e só se forem satisfeitas $-k - 1$ condições ($\rho = -k - 1$) e tem, nesse caso, $-k$ soluções linearmente independentes ($l = -k$).

Observação 3.25 O problema não homogêneo (3.50) só é incondicionalmente solúvel se $k = 0$ ou $k = -1$. Também apenas nestes dois casos os números de defeito l e ρ satisfazem as fórmulas de Gakhov-Coburn (3.35).

O Exemplo 3.24 foi considerado por E. G. Khasabov e G. S. Litvinchuk em [13]. Este mesmo exemplo encontra-se também, exposto pelo método usado nesse artigo, em [26] (Exemplo 23.2).

Bibliografia

- [1] Drekova, G. V., Kravchenko, V. G., *Dimension and structure of the kernel and cokernel of a singular integral operator with linear-fractional Carleman shift and with conjugation*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 315(2), 271-274, 1990 (in Russian). English transl.: Soviet Math. Dokl., 42(3), 743-746, 1991.
- [2] Gakhov, F. D., *Boundary value problems*. Nauka: Moscow, 1977 (in Russian). English transl.: Pergamon Press: Oxford, 1966.
- [3] Gohberg, I. C., Krupnik, N., *One dimensional linear singular integral equations, Vol I*. Operator theory: Advances and Appl., Vol 54. Birkhäuser Verlag: Basel-Boston-Berlin, 1-266, 1992.
- [4] Haseman, C., *Anwendung der Theorie Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben*. Göttingen, 1907.
- [5] Hilbert, D., *Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie*. Verhandl. des III. International Mathematiker Kongresses, Heidelberg, 1904.
- [6] Hilbert, D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Leipzig-Berlin, 1912 (2nd edition, 1924).
- [7] Hoffman, K., *Banach spaces of analytic functions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [8] Karapetians, N. K., Samko, S. G., *Equations with Involutive Operators*. Birkhäuser: Boston-Basel-Berlin, 1-427, 2001.
- [9] Khasabov, E. G., *Boundary value problem of the type of Carleman problem*. Izv. Vuzov, Matematika, 2, 124-133, 1963 (in Russian).
- [10] Khasabov, E. G., Litvinchuk, G. S., *On Hilbert boundary value problem with a shift*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 142(6), 274-277, 1962 (in Russian).
- [11] Khasabov, E. G., Litvinchuk, G. S., *On one type of singular integral equations*. Sibirsk. matem. journ., 5(3), 608-625, 1964 (in Russian).
- [12] Khasabov, E. G., Litvinchuk, G. S., *On a class of singular integral equations and generalized boundary value problem of Carleman type*. Sibirsk. matem. journ., 5(4), 858-880, 1964 (in Russian).

- [13] Khasabov, E. G., Litvinchuk, G. S., *On the index of generalized Hilbert boundary value problem*. Uspekhi matem. nauk, 20(2), 124-130, 1965 (in Russian).
- [14] Khvedelidze, B. V., Mandjavidze, G. F., *On a Riemann-Privalov problem with continuous coefficients*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 123(5), 791-794, 1958 (in Russian).
- [15] Kovaliova (Drekova), G. V., Kravchenko, V. G., *On solutions of singular integral equations with linear fractional Carleman shift and with conjugation*. DEP. Odessk. inženerno-stroito. Inst., Odessa, 1-14, 1990 (in Russian).
- [16] Kravchenko, V. G., Lebre, A. B., Rodríguez, J. S., *Factorization of singular integral operators with a Carleman shift and spectral problems*. Journal of Integral Equations and Applications, 13(4), 339-383, Winter 2001.
- [17] Kravchenko, V. G., Litvinchuk, G. S., *Introduction to the theory of singular integral operators with shift*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht-Boston-London, 1-288, 1994.
- [18] Kravchenko, V. G., Shaev, A. K., *The solvability theory of singular integral equations with a linear fractional Carleman shift*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 316(2), 288-292, 1991 (in Russian). English transl.: Soviet Math. Dokl., 43(1), 73-77, 1991.
- [19] Krein, S. G., *Linear equations in Banach spaces*. Nauka: Moscow, 1-104, 1971 (in Russian).
- [20] Krupnik, N. Ya., *Banach algebras with symbol and singular integral operators*. Oper. Theory Adv. Appl., vol. 26, Birkhauser, New York, 1987.
- [21] Kveselava, D. A., *The solution of a boundary value problem of the function's theory*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 53(8), 683-686, 1946 (in Russian).
- [22] Kveselava, D. A., *Some boundary value problems of the theory functions*. Trudy Tbilissk. Mat. Inst. Akad. Gruz. SSR, 16, 39-80, 1948 (in Russian).
- [23] Lavrentiev, M. A., Shabat, B. V., *Methods of the theory of functions of complex variable*. Nauka: Moscow, 1973 (in Russian).
- [24] Litvinchuk, G. S., *The Noether theory of system of singular integral equations with a Carleman shift and complex conjugated unknowns*. Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. matem. 31(3), 563-586, 1967, 32(6), 1414-1417, 1968 (in Russian).
- [25] Litvinchuk, G. S., *Boundary value problems and singular integral equations with shift*. Nauka: Moscow, 1-448, 1977 (in Russian). Chinese transl.: Beijing, 1982.
- [26] Litvinchuk, G. S., *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht-Boston-London, 1-378, 2000.

- [27] Litvinchuk, G. S., Spitkovsky, I. M., *Sharp estimates of the defect numbers of a generalized Riemann boundary value problem*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 255(5), 1042-1046, 1980 (in Russian). English transl.: Soviet Math. Dokl. 22(3), 781-785, 1980.
- [28] Litvinchuk, G. S., Spitkovsky, I. M., *Sharp estimates of the defect numbers of a generalized Riemann boundary value problem, factorization of Hermitian matrix-valued functions and some problems of approximation by meromorphic functions*. Matem. Sb., 117(159), N° 2, 196-215, 1982 (in Russian). English transl.: Math USSR Sbornik, Vol. 45, N° 2, 205-224, 1983.
- [29] Litvinchuk, G. S., Spitkovsky, I. M., *Factorization of measurable matrix functions*. Akademie-Verlag: Berlin and Birkhäuser Verlag: Basel-Boston-Stuttgart, 1-372, 1987.
- [30] Litvinchuk, G. S., Vasilevski, N. L., *The solvability theory of one class of singular integral equations with an involution*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 221(2), 269-271, 1975 (in Russian). English transl.: Soviet Math. Dokl., Vol.16, No.2, 318-321, 1975.
- [31] Mikhlin, S. G., Prössdorf, S., *Singular integral operators*. Springer-Verlag, 1986.
- [32] Muskhelishvili, N. I., *Singular integral equations*. Fizmatgiz: Moscow, 1962 (in Russian). English transl.: Groningen, Noordhoff, 1953.
- [33] Prössdorf, S., *Einige Klassen singularer Gleichungen*. Akademie-Verlag., 1974. English transl.: North Holland Publishing, 1978.
- [34] Riemann, B., *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse*. Werke, Leipzig, 3-43, 1876.
- [35] Shmul'yan Yu. L., *Riemann problem for positive definite matrices*. Uspekhi matem. nauk, 8(2), 143-145, 1953 (in Russian).
- [36] Simonenko, I. B., *Riemann and Riemann-Haseman boundary value problems with continuous coefficients*. Issledovan. po sovrem. problemam teor. funk. kompleks. perem. Fizmatgis: Moscow, 380-389, 1961 (in Russian).