

# Dimensão de Hausdorff

## Invariância sob transformações de bi-Lipschitz

Maurício Duarte Luís Reis

Aluno do curso de Mestrado em Matemática Aplicada do IST

Área de especialização - Análise Funcional

Trabalho para a cadeira de Sistemas Dinâmicos Discretos

Leccionada pelo Professor Doutor José Sousa Ramos

08-08-2003

## 1 Introdução

Este trabalho tem, como principal objectivo, o estudo da dimensão de Hausdorff, suas propriedades e sua aplicação ao estudo de fractais.

A geometria fractal surgiu com a necessidade de estudar conjuntos que são demasiado irregulares para serem considerados pela geometria clássica, os, assim chamados, *fractais*. Este tipo de conjuntos revelaram-se importantes, quando se tomou consciência de que eles modelam muitos fenómenos naturais, muito melhor do que as figuras da geometria tradicional.

Foi necessário o desenvolvimento de técnicas alternativas, uma vez que os métodos da geometria e cálculo clássicos se mostraram inadequados ao estudo dos fractais.

Neste trabalho, procuramos apresentar, com algum detalhe, uma das principais ferramentas da geometria fractal, a *dimensão*.

Grosso modo, uma dimensão descreve a quantidade de espaço que um certo conjunto ocupa. É um meio de quantificar as irregularidades de um conjunto, quando vistas em escalas muito pequenas. Assim, uma dimensão contém bastante informação sobre as propriedades geométricas de um conjunto.

O assunto central deste trabalho é a dimensão de Hausdorff. Além da sua definição, serão apresentadas algumas das suas propriedades mais importantes, entre as quais se destaca o facto de ser invariante sob transformações de bi-Lipschitz. Serão também apresentados vários métodos para o seu cálculo, bem como, exemplos de aplicação destas técnicas ao cálculo das dimensões de Hausdorff de vários fractais bem conhecidos.

Na secção 2 fazemos um breve resumo de alguns conceitos e notações matemáticas básicas, por exemplo da teoria de conjuntos e funções, que serão necessários ao longo do trabalho. Também são introduzidas algumas ideias básicas da teoria da medida e

distribuições de massa, dado que estas são fundamentais na teoria dos fractais. Esta secção será, essencialmente, uma compilação de definições e resultados básicos, e pode ser utilizada apenas como base de consulta quando, ao longo do trabalho, forem feitas referências a algum do material ali exposto.

A secção 3 será dedicada à apresentação dos *fractais*, uma classe de conjuntos que têm sido identificados, frequentemente, na natureza e na ciência, e cujo estudo motivou o desenvolvimento da geometria fractal e, em particular, de ferramentas matemáticas como as dimensões, e técnicas para o seu respectivo cálculo, que serão objecto de estudo nas secções seguintes.

Embora exista uma grande variedade de definições de dimensões (fractais), vamos concentrar-nos nas dimensões de Hausdorff e dimensões “box-counting” que são, as definições, mais comuns e, em certo sentido, as mais relevantes.

Na secção 4 apresentamos a definição e propriedades da dimensão de Hausdorff, bem como métodos para o seu cálculo. De entre as várias propriedades desta dimensão, destacamos a invariância sob transformações de bi-Lipschitz.

Um dos objectivos da geometria fractal é encontrar formas de classificar fractais, de acordo com propriedades geométricas significativas. Uma abordagem possível é considerar dois conjuntos como ‘equivalentes’ se existir uma transformação de bi-Lipschitz entre eles e procurar ‘invariantes’ para conjuntos equivalentes. Um desses invariantes é a dimensão. Terminamos esta secção com o cálculo das dimensões de Hausdorff de alguns fractais introduzidos na secção anterior.

A dimensão de Hausdorff, que acabamos de referir, será a principal definição de dimensão com que vamos trabalhar. No entanto, é conveniente examinar algumas outras definições, também muito usadas, e a inter-relação entre estas. Assim, a secção 5 abordará uma definição alternativa de dimensão. Mais especificamente, nessa secção, vamos analisar as dimensões “box-counting”, dando especial atenção às propriedades que relacionam esta definição de dimensão, com a dimensão de Hausdorff.

Uma vez que quase todas as definições de dimensão tomam valores entre a dimensão de Hausdorff e a dimensão “box-counting” superior, estas acabam por ser as mais relevantes.

Finalmente, incluímos, na secção 6, algumas das técnicas básicas usadas para o cálculo de dimensões, e vários exemplos de aplicação das mesmas. Estes métodos são extremamente importantes, pois, uma tentativa de cálculo directo da dimensão a partir das definições revela-se, frequentemente, inadequada. Na última subsecção apresentamos um exemplo da invariância da dimensão de Hausdorff sob transformações de bi-Lipschitz, provada para o caso geral na subsecção 4.2.

## 2 Preliminares

Nesta secção serão reunidas algumas ideias e notações matemáticas que serão utilizadas e mencionadas no decorrer do trabalho. Será um resumo de definições e resultados básicos, podendo ser consultada apenas quando, ao longo do trabalho, for feita alguma referência a algum do material aqui exposto.

Começamos por recordar alguns conceitos básicos da teoria de conjuntos e funções. Seguidamente, e uma vez que as medidas e as distribuições de massa têm um papel importante na teoria dos fractais será aqui apresentado um tratamento adequado às nossas necessidades. As noções de teoria da medida serão mantidas no mínimo, incentivando-se que as medidas sejam encaradas como ‘distribuições de massa’ nos conjuntos. Assumiremos a existência de algumas medidas com certas propriedades (intuitivamente quase óbvias), evitando, assim, muitas das dificuldades técnicas usuais na teoria da medida.

### 2.1 Teoria de conjuntos

Aqui recordamos algumas noções e notações básicas de teoria de conjuntos e topologia.

**Definição 2.1** Em  $\mathbb{R}^n$ , definimos bola fechada e bola aberta de centro  $x$  e raio  $r > 0$ , por:

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\}$$

e

$$B_r^0(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\},$$

respectivamente. Note-se que em  $\mathbb{R}^2$  uma bola é um disco, e em  $\mathbb{R}$  é apenas um intervalo.

**Definição 2.2** Se  $A$  é um (qualquer) conjunto de números reais, o supremo de  $A$  denota-se por,  $\sup A$ , e é o menor número,  $s$ , tal que  $s \geq x$  para qualquer  $x \in A$ , ou infinito, no caso de nenhum número verificar esta condição. Analogamente, o ínfimo de  $A$ , representa-se por  $\inf A$  e é o maior número,  $i$ , tal que  $i \leq x$  para qualquer  $x \in A$ , ou é  $-\infty$ .

Intuitivamente, o supremo e o ínfimo podem ser vistos como o máximo e o mínimo do conjunto, no entanto, é importante notar que eles não precisam de pertencer ao conjunto.

Escreve-se  $\sup_B(f(x))$  para representar o supremo do conjunto formado pelos valores que a função  $f$  toma, quando  $x$  percorre  $B$ .

**Definição 2.3** O diâmetro de um subconjunto (não-vazio) de  $\mathbb{R}^n$  é dado por:  $|A| = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$ , e convencionou-se que  $|\emptyset| = 0$ .

**Definição 2.4** Um conjunto  $A$  é compacto se, qualquer cobertura de  $A$  por conjuntos abertos admitir uma subcobertura finita. Tecnicamente, a compacidade é uma propriedade extremamente útil que permite reduzir conjuntos infinitos de condições a um número finito destas. Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é compacto sse é limitado e fechado.

**Definição 2.5** Um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  é conexo se não existem dois conjuntos abertos  $U$  e  $V$  tais que  $A \subset U \cup V$ , com  $A \cap U$  e  $A \cap V$  disjuntos e não vazios. Intuitivamente, um conjunto  $A$  é conexo se for composto por uma ‘peça’ única. Um conjunto que não é conexo diz-se desconexo. O maior subconjunto conexo de  $A$  que contém um determinado ponto  $x$ , chama-se a componente conexa de  $x$ .

**Definição 2.6** O conjunto  $A$  é totalmente desconexo se a componente conexa de cada ponto de  $A$  consistir apenas desse ponto. Uma condição suficiente para que isto se verifique é que para qualquer par de pontos  $x$  e  $y$  de  $A$  seja possível encontrar conjuntos abertos disjuntos,  $U$  e  $V$ , tais que  $x \in U$ ,  $y \in V$  e  $A \subset U \cup V$ .

Resta-nos referir uma outra classe de conjuntos, embora a sua definição precisa seja indirecta.

**Definição 2.7** A classe dos conjuntos de Borel (ou conjuntos borelianos) é a mais pequena colecção de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que satisfaz as propriedades seguintes:

- (a) Os conjuntos abertos ou fechados são conjuntos de Borel.
- (b) A união ou intersecção, de qualquer colecção finita ou numerável de conjuntos de Borel, é um conjunto de Borel.

Ao longo deste trabalho, praticamente todos os subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que nos vão interessar, serão conjuntos de Borel.

## 2.2 Funções e limites

Algumas transformações (ou funções) de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  são geometricamente significativas. Recordemos algumas delas.

**Definição 2.8** Uma transformação  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se uma congruência ou isometria se preserva as distâncias, i.e. se  $|S(x) - S(y)| = |x - y|$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . As isometrias também preservam ângulos, e transformam conjuntos em outros geometricamente congruentes. Alguns casos particulares especiais são as translações, que têm a forma  $S(x) = x + a$ , e cujo efeito é o deslocamento dos pontos paralelamente ao vector  $a$ ; as rotações, que têm um centro  $a$  tal que  $|S(x) - a| = |x - a|$  para qualquer  $x$ ; e as reflexões.

**Definição 2.9** Uma transformação  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma semelhança se existir uma constante,  $c$ , tal que  $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$  para qualquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . A constante  $c$  chama-se razão da semelhança  $S$ . Uma semelhança transforma conjuntos, noutros geometricamente semelhantes.

**Definição 2.10** Se  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem a forma  $S(x) = T(x) + a$ , onde  $T$  é uma transformação linear não-singular (injectiva) e  $a$  é um ponto de  $\mathbb{R}^n$ , então  $S$  chama-se uma transformação afim.

**Definição 2.11** Uma função  $f : X \rightarrow Y$  chama-se transformação de Hölder de expoente  $\alpha$ , se existir uma constante,  $c$ , tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, \forall x, y \in X. \quad (1)$$

A condição (1) chama-se condição de Hölder de expoente  $\alpha$ .

**Definição 2.12** A função  $f : X \rightarrow Y$ , chama-se transformação de Lipschitz se a condição (1) se satisfizer para  $\alpha = 1$ , i.e., se  $\exists c \in \mathbb{R}$ , tal que  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \forall x, y \in X.$$

O ínfimo dos valores de  $c$  para os quais esta desigualdade se verifica, chama-se constante de Lipschitz de  $f$ , e denota-se por  $Lip f$ . O espaço das funções de Lipschitz de  $X$  em  $\mathbb{R}^m$  (para um  $m$  apropriado), representa-se por  $Lip X$ .

**Definição 2.13** Seja  $f : X \rightarrow Y$ . Se existirem constantes,  $c_1$  e  $c_2$ , com  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ , tais que

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|, \forall x, y \in X,$$

então  $f$  chama-se transformação de bi-Lipschitz.

Note-se que as isometrias e as semelhanças são casos particulares das transformações de bi-Lipschitz.

**Definição 2.14** Se existir uma transformação de bi-Lipschitz  $f : A \rightarrow B$ , então  $A$  e  $B$  dizem-se conjuntos bi-Lipschitz equivalentes. Analogamente, se existir uma transformação de Lipschitz entre dois conjuntos, estes dizem-se conjuntos Lipschitz equivalentes.

As noções de limites e continuidade são bem conhecidas. Vamos aqui recordar apenas definições de limite superior e limite inferior e de homeomorfismo.

**Definição 2.15** Consideremos uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , e um ponto  $a \in \bar{D}$ . Aos valores dos limites:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{V_\varepsilon(a)} (f(x)) = \inf_{\varepsilon > 0} \left[ \sup_{V_\varepsilon(a)} (f(x)) \right]$$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{V_\varepsilon(a)} (f(x)) = \sup_{\varepsilon > 0} \left[ \inf_{V_\varepsilon(a)} (f(x)) \right]$$

dá-se o nome de limite superior e limite inferior da função no ponto  $a$  e representam-se por  $\limsup_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\liminf_{x \rightarrow a} f(x)$ , respectivamente.

Note-se que  $\inf_{V_\varepsilon(a)} (f(x))$  ou é  $-\infty$  ou aumenta quando  $\varepsilon$  decresce e analogamente para  $\sup_{V_\varepsilon(a)} (f(x))$ .

Assim, os limites superior e inferior existem (como números reais ou como  $-\infty$  ou  $+\infty$ ) para qualquer função  $f$ , e a variação de  $f$  para valores de  $x$  próximos de  $a$ .

**Definição 2.16** Chama-se oscilação de  $f$  no ponto  $a$ , e representa-se por  $\omega(f, a)$ , a diferença  $\omega(f, a) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x) - \liminf_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Se  $\omega(f, a) = 0$ , ou seja, se  $\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x)$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe e coincide com este valor comum.

Relembremos agora a noção de homeomorfismo.

**Definição 2.17** Chama-se homeomorfismo a uma bijecção,  $f : X \rightarrow Y$ , contínua e com inversa contínua. Nesta situação diz-se que  $X$  e  $Y$  são conjuntos homeomorfos.

Relativamente ao tema da diferenciabilidade, referimos apenas o teorema do valor médio:

**Proposição 2.18 (Teorema do valor médio)** Dados  $a < b$  e  $f$  diferenciável em  $[a, b]$ , existe  $c \in ]a, b[$ , tal que  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ .

**Observação 2.19** Como consequência do teorema do valor médio, qualquer função diferenciável com derivada limitada é necessariamente uma função de Lipschitz.

Finalmente, relativamente aos logaritmos, convém referir que, sempre que não seja indicada a respectiva base, serão considerados com base 10.

## 2.3 Medidas e distribuições de massa

As medidas são indispensáveis no estudo da matemática dos fractais, no entanto, em geral, são suficientes algumas ideias básicas. Assim, evitaremos uma aproximação à teoria da medida mais técnica.

Consideraremos, apenas, medidas em subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.20** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Chamamos  $\mu$  uma medida em  $X$ , se  $\mu$  atribui um valor não negativo, possivelmente  $\infty$ , a cada subconjunto de  $X$ , satisfazendo:

(a)  $\mu(\emptyset) = 0$

(b)  $\mu(A) \leq \mu(B)$  se  $A \subset B$

(c) Se  $A_1, A_2, \dots$ , é uma sequência, finita ou numerável, de conjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{2}$$

tendo-se a igualdade, em (2), i.e.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

se os  $A_i$  forem conjuntos de Borel disjuntos.

Chamamos  $\mu(A)$ , a medida do conjunto  $A$ .

**Observação 2.21** *Mais rigorosamente, esta é a definição de uma medida exterior definida sobre a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos. Contudo, para os nossos propósitos, interessa-nos apenas assegurar que  $\mu$  está definida para qualquer conjunto  $A$ , e uma vez que, neste trabalho, em geral, estaremos interessados em conjuntos de Borel, convencionamos que sempre que usarmos o termo ‘medida’ estamos a assumir que as condições acima são satisfeitas.*

Apresentamos agora alguns resultados que serão necessários ao longo deste trabalho.

Se  $B \subset A$  então  $A$  pode escrever-se como a seguinte união disjunta,  $A = B \cup (A \setminus B)$ , logo, pela condição (c) da definição acima, se  $A$  e  $B$  são conjuntos borelianos,

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) \quad (3)$$

Se  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , é uma sequência crescente de conjuntos de Borel, então

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \quad (4)$$

Para verificar isto, basta notar que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$ , sendo esta união disjunta, logo (usando (c) da Definição 2.20 e (3))

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{i+1}) - \mu(A_i) = \mu(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{i+1}) - \mu(A_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

Mais geralmente, se, para  $\delta > 0$ ,  $A_\delta$  são conjuntos de Borel tais que  $A_{\delta'} \subset A_\delta$  para  $0 < \delta < \delta'$ , então

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(A_\delta) = \mu\left(\bigcup_{\delta > 0} A_\delta\right) \quad (5)$$

**Definição 2.22** *O suporte de uma medida,  $\mu$ , representa-se por  $\text{spt } \mu$  e é o mais pequeno conjunto fechado cujo complementar tem medida nula, isto é:*

$$\text{spt } \mu = X \setminus \bigcup \{U : U \text{ é aberto e } \mu(U) = 0\}.$$

*Note-se que o suporte de uma medida é sempre um conjunto fechado e  $x$  pertence ao suporte de  $\mu$  sse  $\mu(B_r(x)) > 0$  para qualquer  $r > 0$ . Diz-se que  $\mu$  é uma medida num conjunto  $A$  se este contiver o suporte de  $\mu$ .*

**Definição 2.23** *Uma medida num subconjunto limitado de  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$  será chamada uma distribuição de massa. Nesta situação referimo-nos a  $\mu(A)$  como sendo a massa do conjunto  $A$ .*

Vejamos agora alguns exemplos de medidas e distribuições de massa. Assumiremos, sem apresentar provas, a existência de medidas com estas propriedades.

**Exemplo 2.24 (Medida da contagem)** Para cada subconjunto,  $A$ , de  $\mathbb{R}^n$  a medida da contagem define-se da seguinte forma,  $\mu(A)$  é o número de pontos em  $A$ , se  $A$  é finito, e é  $\infty$  caso contrário.

**Exemplo 2.25 (Massa pontual)** Para um determinado  $a \in \mathbb{R}^n$ , seja  $\mu(A) = 0$  se  $a \notin A$  e  $\mu(A) = 1$  se  $a \in A$ . Então  $\mu$  é uma distribuição de massa, com suporte  $\{a\}$ , que pode ver-se como uma massa pontual unitária, concentrada em  $a$ .

**Exemplo 2.26 (Medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ )** A medida de Lebesgue é a extensão natural, a uma classe mais vasta de conjuntos, do ‘volume  $n$ -dimensional’ (‘comprimento’ se  $n = 1$ , ‘área’ se  $n = 2$  e ‘volume’ se  $n = 3$ ). Começamos por recordar que o volume  $n$ -dimensional do ‘paralelepípedo’  $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ , é dado por

$$\text{vol}^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

A medida de Lebesgue  $n$ -dimensional,  $\mathcal{L}^n$ , define-se por

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas de  $A$  por colecções numeráveis de paralelepípedos.

Pode mostrar-se que  $\mathcal{L}^n(A) = \text{vol}^n(A)$ , se  $A$  é um paralelepípedo, ou qualquer outro conjunto cujo volume pode ser calculado pelas regras usuais de medição. Assim, para  $n = 1, 2$  e  $3$  a medida de Lebesgue tem uma interpretação intuitiva. Em  $\mathbb{R}$  a medida de Lebesgue pode ser vista como o comprimento, e por vezes escreve-se,  $\text{comprimento}(A)$ , em vez de  $\mathcal{L}^1(A)$ . Pela mesma razão, usamos, por vezes,  $\text{área}(A)$  em vez de  $\mathcal{L}^2(A)$ ,  $\text{vol}(A)$  em vez de  $\mathcal{L}^3(A)$  e até  $\text{vol}^n(A)$  em vez de  $\mathcal{L}^n(A)$ .

**Exemplo 2.27 (Distribuição de massa uniforme num segmento de recta)** Seja  $L$  um segmento de recta de comprimento um. Defina-se  $\mu(A) = \mathcal{L}^1(L \cap A)$ , i.e. o comprimento da intersecção de  $A$  com  $L$ . Então  $\mu$  é uma distribuição de massa com suporte  $L$ , visto que  $\mu(A) = 0$  se  $A \cap L = \emptyset$ . Podemos assumir que  $\mu$  tem massa 1, distribuída uniformemente ao longo do segmento de recta  $L$ .

**Exemplo 2.28 (Restricção de uma medida)** Seja  $\mu$  uma medida em  $X$  e seja  $E$  um subconjunto boreliano de  $X$ . A restrição de  $\mu$  a  $E$ , denota-se  $\mu|_E$ , e define-se por:  $\mu|_E(A) = \mu(A \cap E)$ , para qualquer conjunto  $A \subset X$ . Tem-se, assim, que  $\mu|_E$  é uma medida em  $X$  com suporte contido em  $\bar{E}$ .

Ao longo deste trabalho, as mais importantes medidas que vamos encontrar serão as medidas de Hausdorff  $s$ -dimensionais,  $\mathcal{H}^s$ , em subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , onde  $0 \leq s \leq n$ . Estas medidas, que serão introduzidas na subsecção 4.1, são uma generalização das medidas de Lebesgue para dimensões não necessariamente inteiras.



Apresentamos agora um método, frequentemente utilizado para construir uma distribuição de massa num subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

Necessitaremos deste método na secção 6.

A ideia consiste basicamente num processo de subdivisão sucessiva de uma determinada massa pelas partes de um conjunto boreliano limitado.

Para  $m \geq 2$  tomamos uma colecção (encadeada) de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , indexada nas sequências  $\{(i_1, \dots, i_k) : k > 0 \text{ e } 1 \leq i_j \leq m \text{ para cada } j\}$ . Para qualquer  $(i_1, \dots, i_k)$ , seja  $X_{i_1, \dots, i_k}$  um subconjunto limitado, não vazio de  $\mathbb{R}^n$ , e  $\mathcal{E}$ , a família de todos esses conjuntos. Assumimos que estes conjuntos estão organizados da seguinte forma:

$$X_{i_1, \dots, i_k} \supset \bigcup_{i=1}^m X_{i_1, \dots, i_k, i}$$

Supomos que  $\mu(X_{i_1, \dots, i_k}) < \infty$  está definida para  $X_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{E}$ , satisfazendo

$$\mu(X_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(X_{i_1, \dots, i_k, i})$$

para cada  $(i_1, \dots, i_k)$ , isto é, a ‘massa’  $\mu(X_{i_1, \dots, i_k})$  está subdividida pelos subconjuntos  $X_{i_1, \dots, i_k, i}$ ,  $(1 \leq i \leq m)$ . Assumimos que, para qualquer sequência  $(i_1, i_2, \dots)$ , tanto os diâmetros dos conjuntos,  $|X_{i_1, \dots, i_k}|$ , como as suas medidas,  $\mu(X_{i_1, \dots, i_k})$ , convergem para 0 quando  $k \rightarrow \infty$ . Para cada  $k$ , definimos  $E_k = \cup_{i_1, \dots, i_k} X_{i_1, \dots, i_k}$  e atribuímos ao seu complementar a medida zero, i.e.  $\mu(\mathbb{R}^n \setminus E_k) = 0$ . Tomamos  $E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ , sendo que, por ser uma intersecção de uma sequência decrescente conjuntos fechados não vazios,  $E$  é fechado e não vazio. Denotamos por  $\mathcal{C}$  a colecção formada pelos conjuntos de  $\mathcal{E}$  e pelos complementares dos  $E_k$ .

Se definirmos,  $X_0 = \bigcup_{i=0}^m X_i$ , o procedimento acima descrito, resume-se, em traços gerais, aos seguintes passos:

1. Atribuir a  $X_0$  uma massa  $\mu(X_0) < \infty$
2. Tomar  $m \geq 2$  subconjuntos de  $X_0$  :  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .
3. Dividir a massa  $\mu(X_0)$  pelos conjuntos  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , de forma que  $\mu(X_0) = \sum_{i=1}^m \mu(X_i)$
4. Aplicar o mesmo processo a cada um dos  $X_i$ .

Desta forma, definimos  $\mu(B)$  para todos os conjuntos  $B$  em  $\mathcal{C}$ .

Torna-se aceitável admitir que conhecendo  $\mu$  nestes conjuntos, seja possível estendê-la a uma medida em  $\mathbb{R}^n$ . De facto, se para  $A \subset \mathbb{R}^n$ , definirmos

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_i \mu(V_i) : A \cap E \subset \cup_i V_i \text{ e } V_i \in \mathcal{E} \right\}$$

é possível mostrar a seguinte proposição.

**Proposição 2.29** *Seja  $\mu$  definida numa colecção de conjuntos  $\mathcal{C}$ , como acima. Então,  $\mu$  pode estender-se a todos os subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , tornando-se, assim, uma medida. O suporte de  $\mu$  está contido em  $E$  (definido acima).*

Assim, se  $\mu$  for definida usando este processo de ‘subdivisão sucessiva’, então pode estender-se a uma medida em  $E$ .

### 3 Fractais

O principal objectivo deste trabalho será o estudo da dimensão de Hausdorff(-Besicovitch) e suas propriedades, uma vez que este, é um dos principais conceitos usados para o estudo dos fractais. Dedicamos, assim, esta secção à apresentação da classe de conjuntos que está na origem da geometria fractal, e de todas as suas ferramentas matemáticas, em particular, de ‘instrumentos’, como as dimensões e respectivas técnicas de cálculo, que ocuparão as secções seguintes deste trabalho.

Comecemos, então, por introduzir a noção de *fractal*.

A palavra ‘*fractal*’, proveniente do latim ‘*fractus*’, que significa ‘partido’, foi introduzida por Benoit Mandelbrot, no seu “tratado fundacional”, em 1975, para descrever objectos que eram demasiado irregulares para se enquadrarem num cenário geométrico tradicional.

No seu, já mencionado, “tratado original”, Mandelbrot definiu um fractal, como um conjunto com dimensão de Hausdorff estritamente maior que a sua dimensão topológica. (A *dimensão topológica* de um conjunto é sempre um número inteiro, sendo 0 se o conjunto é totalmente desconexo, 1 se cada ponto tem vizinhanças arbitrariamente pequenas com fronteira de dimensão 0 e assim sucessivamente. Em geral, mostra-se que, a dimensão topológica é, no máximo, igual à dimensão de Hausdorff.) No entanto, esta definição revelou-se insatisfatória, pois excluía vários conjuntos que, claramente deviam ser considerados fractais.

Várias outras definições têm sido propostas, mas todas parecem apresentar este mesmo defeito.

Por esta razão, neste trabalho, em vez de apresentarmos uma definição precisa de ‘fractal’, vamos convencionar que um conjunto  $F$  no espaço Euclidean é um fractal se exhibir todas, ou a maior parte das seguintes características:

- (i)  $F$  tem uma “fine structure”, ou seja, detalhe de irregularidade em qualquer escala (arbitrariamente pequena).
- (ii)  $F$  é demasiado irregular para ser descrito pelas linguagens do cálculo ou da geometria tradicionais, quer local, quer globalmente.
- (iii) Frequentemente,  $F$  tem algum tipo de auto-semelhança ou auto-afinidade ( $F$  é um conjunto de partes que se assemelham ao todo), possivelmente num sentido estatístico ou aproximado.

- (iv) Usualmente a ‘dimensão fractal’ de  $F$  (definida de algum modo) é estritamente maior que a sua dimensão topológica.
- (v) Em muitos casos,  $F$  tem uma definição muito simples, por vezes recursiva.
- (vi) Frequentemente,  $F$  tem uma aparência natural.

Existem muitos exemplos de fractais, mas algumas classes são mais interessantes. Alguns fractais auto-semelhantes são particularmente bem conhecidos, tais como: o conjunto de Cantor, a poeira de Cantor, a curva de von Koch, o triângulo de Sierpinski e a “Sierpinski carpet” (Ver figuras 1 a 5).

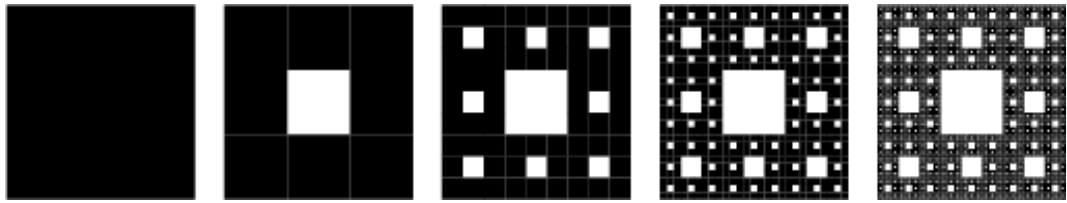


Figura 1-“Sierpinski carpet” (primeiros 5 passos da respectiva construção)

Uma vez que serão referidos várias vezes, consideremos mais detalhadamente alguns deles:

**Exemplo 3.1 (O conjunto de Cantor)** *É um dos fractais mais fáceis de construir sendo, no entanto, um dos que apresenta um maior número de características típicas dos fractais. É construído, partindo do intervalo unitário,  $[0, 1]$ , que vamos denotar por  $E_0$  e dividir em três partes iguais. Em seguida, representamos por  $E_1$ , o conjunto resultante da eliminação da terça parte central do conjunto  $E_0$ , i.e.  $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . Aplicamos agora o mesmo procedimento a cada um dos intervalos de  $E_1$  e representamos o conjunto obtido por  $E_2$ . Assim,  $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ . Repetimos este procedimento, obtendo, sucessivamente,  $E_k$  a partir da eliminação da terça parte central de cada um dos intervalos de  $E_{k-1}$ . Assim,  $E_k$  consiste de  $2^k$  intervalos, de comprimento  $3^{-k}$ , que designamos por intervalos básicos. O conjunto de Cantor,  $F$ , é o conjunto de todos os pontos que estão em todos os  $E_k$ , i.e.  $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ . Este conjunto também pode ser visto como o limite da sequência de conjuntos  $E_k$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Uma boa aproximação da representação gráfica de  $F$  (que é, obviamente, impossível de obter) é a representação de um dos  $E_k$  com  $k$  suficientemente grande (ver figura 2).*

*Podemos, ainda, observar que, cada conjunto  $E_k$ , tem comprimento total (medida de Lebesgue)  $2^k 3^{-k} = (\frac{2}{3})^k$  e, conseqüentemente, o comprimento total do conjunto de Cantor será  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^k = 0$ . Resta referir o facto de que  $F$  é um conjunto fechado, não numerável, que contém infinitos números em qualquer vizinhança de cada um dos seus pontos, sendo, além disso, um conjunto totalmente desconexo (ver definição 2.6), como consequência da proposição 4.11 e da observação 4.12, apresentadas na subsecção 4.2.*

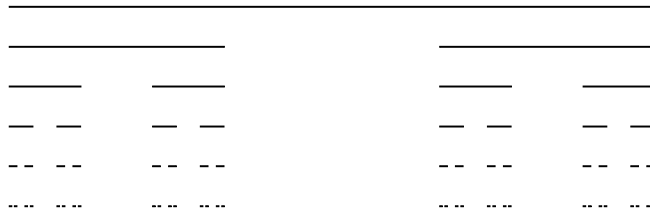


Figura 2 - Construção do conjunto de Cantor

**Exemplo 3.2 (A curva de von Koch)** Para construir esta curva, partimos de um segmento de recta,  $E_0$ , com comprimento 1. O conjunto  $E_1$  é formado pelos quatro segmentos de recta resultantes da remoção da terça parte central de  $E_0$  e sua substituição pelos outros dois lados do triângulo equilátero que teria por base o segmento removido. Construimos  $E_2$ , aplicando o mesmo procedimento a cada um dos segmentos em  $E_1$ , e assim sucessivamente. Assim,  $E_k$  é obtido substituindo a terça parte central de cada segmento de recta em  $E_{k-1}$  pelos outros dois lados do triângulo equilátero com essa base. A curva de von Koch,  $F$ , é a curva limite da sequência de conjuntos  $E_k$ . Será útil observar que a curva de von Koch é formada por quatro partes, cada uma das quais semelhante ao conjunto todo, mas reduzida por um factor de  $\frac{1}{3}$ . Note-se também que facilmente se verifica que o conjunto  $E_k$  tem comprimento  $(\frac{4}{3})^k$  o que implica, fazendo  $k \rightarrow \infty$ , que  $F$  tem comprimento infinito. Por outro lado,  $F$  tem área zero. Assim, nem a área, nem o comprimento são características muito úteis na descrição deste conjunto.

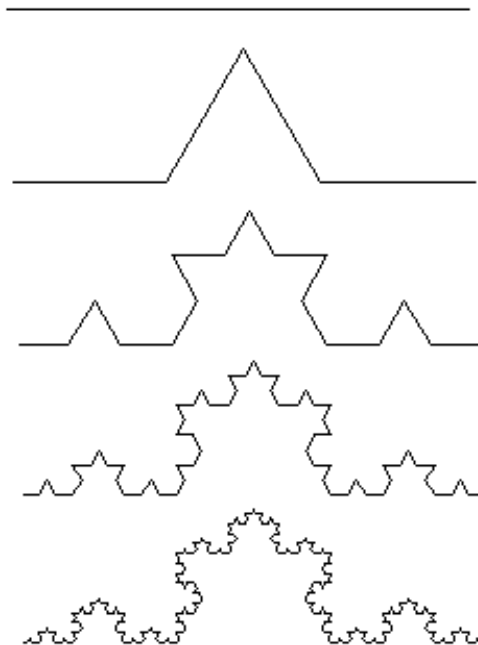


Figura 3 - Construção da curva de von Koch (conjuntos  $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4$ )

**Exemplo 3.3 (O triângulo de Sierpinski)** Para obter este conjunto, começamos por considerar um triângulo equilátero,  $E_0$ . Desse triângulo retiramos o triângulo equilátero invertido cujos vértices são os pontos médios de cada um dos lados do triângulo inicial. Ao conjunto resultante, formado por três triângulos equiláteros, chamamos  $E_1$ . A aplicação repetida deste processo, a cada um dos triângulos remanescentes, conduz-nos ao triângulo de Sierpinski. O conjunto que resulta da  $k$  – ésima aplicação do processo descrito denomina-se  $E_k$ . Podemos ver este processo como consistindo na substituição repetida de um triângulo equilátero por outros três com metade da altura. A figura 4 ilustra os primeiros cinco passos da construção deste conjunto.



Figura 4 - Construção do triângulo de Sierpinski (conjuntos  $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4$ )

**Exemplo 3.4 (A poeira de Cantor)** Construimos este conjunto partindo de um quadrado,  $E_0$ , que dividimos em dezasseis quadrados com um quarto do comprimento de lado. Seguidamente, numerando os quadrados resultantes a partir do canto superior esquerdo e seguindo as linhas, mantemos os quadrados com os números 3, 5, 12 e 14, e eliminamos os restantes (como ilustrado na figura 5). Repetimos este processo em relação aos quadrados que mantivemos. Representamos por  $E_k$  o conjunto que resulta da  $k$  – ésima aplicação do processo descrito. A poeira de Cantor é o conjunto resultante da aplicação indefinida deste procedimento. Na figura 5 apresentamos os conjuntos  $E_0, E_1, E_2$  e  $E_3$  obtidos pelo processo descrito.

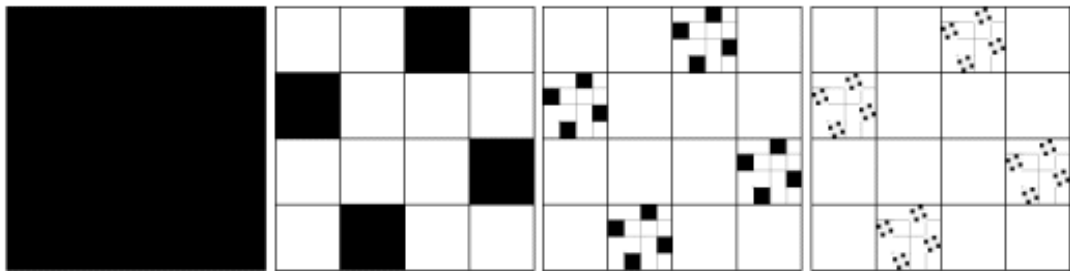


Figura 5 - Construção da poeira de Cantor (conjuntos  $E_0, E_1, E_2, E_3$ )

Finalmente, para explicitar um pouco melhor o significado de auto-semelhança ou auto-afinidade estatística ou aproximada (referidas no ponto (iii) da lista de propriedades características dos fractais), apresentamos, na figura 6, uma ‘curva de Koch aleatória’ - que resulta de escolher, aleatoriamente, em que lado da curva devem ser colocados os dois novos segmentos, em cada passo da construção. Nesta ‘curva aleatória’ a auto-semelhança estrita da curva de von Koch é substituída por uma ‘auto-semelhança estatística’.



Figura 6 - ‘Curva de von Koch aleatória’

A geometria fractal trata do estudo de conjuntos com propriedades como (i) – (vi), acima. Sendo, muitas das questões de estudo em relação aos fractais, análogas às questões que têm sido colocadas, ao longo dos séculos, acerca dos objectos geométricos clássicos. No entanto, os métodos da geometria e cálculo clássicos são inadequados ao estudo dos fractais, sendo necessárias técnicas alternativas.

A principal ferramenta da geometria fractal é a *dimensão*, nas suas várias formas. O facto de uma curva (suave) ter dimensão 1, e uma superfície ter dimensão 2, é já suficientemente bem conhecido. Por outro lado, será menos claro, que ao conjunto de Cantor seja atribuída a dimensão  $\frac{\log 2}{\log 3}$ , e à curva de von Koch a dimensão  $\frac{\log 4}{\log 3}$ . No entanto, observe-se que este último número é consistente com o facto da curva de von Koch ter necessariamente dimensão maior que 1 (porque tem comprimento infinito) e menor que 2 (porque tem área zero).

Ao longo deste trabalho, estas dimensões serão abordadas com mais rigor. No entanto, o seguinte argumento dá-nos uma interpretação, embora algo grosseira, destas dimensões, indicando como é que elas reflectem propriedades de escala e auto-semelhança.

Comparemos a situação dos fractais com o que se passa em conjuntos com dimensão conhecida. Começemos por notar que um segmento de recta pode ver-se como sendo constituído por quatro cópias de si próprio reduzidas por um factor de  $\frac{1}{4}$ . Um segmento tem dimensão  $-\frac{\log 4}{\log \frac{1}{4}} = 1$ . Por sua vez, um quadrado é formado por quatro cópias de si próprio reduzidas por um factor de  $\frac{1}{2}$  (i.e. com metade do comprimento de lado) e tem dimensão  $-\frac{\log 4}{\log \frac{1}{2}} = 2$ . Seguindo o mesmo raciocínio, a curva de von Koch é constituída por quatro cópias de si própria, reduzidas por um factor de  $\frac{1}{3}$ , e tem dimensão  $-\frac{\log 4}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 4}{\log 3}$ . O conjunto de Cantor pode ver-se como contendo duas cópias de si próprio, reduzidas por um factor de  $\frac{1}{3}$ , tendo, assim, dimensão  $-\frac{\log 2}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Em geral, pode dizer-se que um conjunto constituído por  $m$  cópias de si próprio, reduzidas por um factor  $r$ , tem dimensão  $-\frac{\log m}{\log r}$ . O número assim obtido chama-se “*similarity dimension*” do conjunto.

Contudo, a “*similarity dimension*” só tem significado para uma pequena classe de conjuntos estritamente auto-semelhantes. Assim, existem outras definições de dimensão que são aplicáveis a um maior número de casos. Por exemplo, a dimensão de Hausdorff e a “*box-counting dimension*”, cujas definições e propriedades serão expostas nas secções seguintes, estão definidas para qualquer conjunto, podendo mostrar-se que nestes quatro exemplos, coincidem com a “*similarity dimension*”.

## 4 Medida e dimensão de Hausdorff

Das várias ‘dimensões fractais’ em uso, a definição de Hausdorff, baseada numa construção de Caratheódory, é a mais remota e provavelmente a mais importante. A dimensão de Hausdorff tem as vantagens de estar definida para qualquer conjunto e de ser matematicamente conveniente, por se basear em medidas que são relativamente fáceis de manipular. A maior desvantagem é que, em muitos casos, é difícil de calcular ou estimar por métodos computacionais. Contudo, para uma compreensão da matemática dos fractais é essencial familiarizar-se com a medida e dimensão de Hausdorff.

### 4.1 Medida de Hausdorff

Começemos por introduzir o conceito de  $\delta$  – cobertura.

**Definição 4.1** Uma  $\delta$  – cobertura de um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$ , é uma colecção contável (finita ou numerável) de subconjuntos,  $\{U_i\}$ , de  $\mathbb{R}^n$ , com diâmetro no máximo  $\delta$ , que cobrem  $F$ , i.e.  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  com  $0 < |U_i| \leq \delta$  para cada  $i$ .

Recordemos que o *diâmetro* de um conjunto,  $A$ , é dado  $|A| = \sup \{|x - y| : x, y \in A\}$  (ver definição 2.3).

Seja  $F$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  e  $s \geq 0$ . Para qualquer  $\delta > 0$ , definimos:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \quad (6)$$

Ou seja, tomamos todas as  $\delta$  – coberturas de  $F$  e procuramos minimizar a soma das potências (de ordem  $s$ ) dos diâmetros. Quando o  $\delta$  diminui, a classe de coberturas de  $F$  admissíveis em (6) é reduzida. Consequentemente, o ínfimo,  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ , aumenta e aproxima-se de um limite quando  $\delta \rightarrow 0$ . Assim, definimos:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) = \sup_{\delta \geq 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \quad (7)$$

Este limite existe para qualquer subconjunto  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ , embora o seu valor possa ser (e usualmente é)  $\infty$  ou 0.

$\mathcal{H}^s(F)$  chama-se a *medida de Hausdorff  $s$  – dimensional* de  $F$ .

Pode mostrar-se que  $\mathcal{H}^s$  é uma medida (ver definição 2.20). Em particular,  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ ; se  $E \subset F$  então  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ ;  $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$ , para qualquer colecção contável de conjuntos  $\{F_i\}$ , verificando-se a igualdade se os  $F_i$  forem conjuntos de Borel disjuntos (ver definição 2.7).

As medidas de Hausdorff generalizam os conceitos familiares de comprimento, área, volume, etc. Ou melhor, as medidas de Hausdorff generalizam as medidas de Lebesgue (ver exemplo 2.26).

Mostra-se que, para subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , a medida de Hausdorff  $n - dimensional$  é, a menos do produto por uma constante, apenas a medida de Lebesgue  $n - dimensional$  (ou seja, o volume  $n - dimensional$ ).

Mais precisamente, se  $F$  é um subconjunto boreliano de  $\mathbb{R}^n$  (ver definição 2.7), então  $\mathcal{H}^n(F) = c_n \mathcal{L}^n(F)$ , onde  $c_n = 2^n \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{\frac{n}{2}}}$  é o inverso do volume de uma bola  $n - dimensional$  de diâmetro 1. (Ou  $\mathcal{L}^n(F) = 2^{-n} v_n \mathcal{H}^n(F)$ , onde  $v_n$  é o volume da bola unitária  $n - dimensional$ ).

(Recordemos que, a função gama é dada por,  $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$ , e verifica, entre outras, as seguintes propriedades:  $\Gamma(n) = (n-1)!$  para  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , e  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .)

Analogamente, para subconjuntos suficientemente regulares de  $\mathbb{R}^n$ , de dimensão menor, temos que  $\mathcal{H}^0(F)$  é o número de pontos em  $F$ ;  $\mathcal{H}^1(F)$  dá-nos o comprimento de uma curva suave  $F$ ;  $\mathcal{H}^2(F)$  dá-nos a área (normalizada) de uma superfície suave, i.e.  $\mathcal{H}^2(F) = \frac{4}{\pi} \text{área}(F)$ ;  $\mathcal{H}^3(F) = \frac{6}{\pi} \text{vol}(F)$ , etc. Em geral,  $\mathcal{H}^m(F) = c_m \text{vol}^m(F)$ , se  $F$  é uma subvariedade suave de  $\mathbb{R}^n$  com dimensão  $m$ , i.e. uma superfície  $m - dimensional$  no sentido clássico.

**Observação 4.2** 1. Por vezes, a medida de Hausdorff  $s - dimensional$  é apresentada, com algumas constantes de normalização. Mais precisamente,  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ , vem dado por:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{|U_i|}{2} \right)^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta - \text{cobertura de } F \right\}$$

onde

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} \text{ (que, fazendo } s = n, \text{ é o volume da bola } B_1(0) \text{ em } \mathbb{R}^n \text{)}$$

A principal vantagem de utilizar esta definição alternativa, é o facto de se verificar que, em  $\mathbb{R}^n$ , a medida medida de Hausdorff  $n - dimensional$ , assim definida, coincide com a medida de Lebesgue. Podendo mostrar-se que

- (i)  $\mathcal{H}^0$  é a medida da contagem. (ver exemplo 2.24)
- (ii)  $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  (ver exemplo 2.26)
- (iii)  $\mathcal{H}^s \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^n$ , para qualquer  $s > n$ .

2. Uma outra variante da definição de medida de Hausdorff  $s - dimensional$  que também é, por vezes, usada, consiste em considerar, na definição de  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  apenas as coberturas por bolas de diâmetro menor que  $\delta$ .

Consideremos, agora, algumas importantes propriedades da medida de Hausdorff  $s - dimensional$ .

As propriedades de escala (ou seja, o comportamento sob ampliações/reduções), do comprimento, área e volume são bem conhecidas. Quando há uma ampliação/redução



por um factor  $\lambda$ , o comprimento de uma curva é multiplicado por  $\lambda$ , a área de uma região plana é multiplicada por  $\lambda^2$  e o volume de um objecto tri-dimensional é multiplicado por  $\lambda^3$ . Como é previsível, nesta situação, a medida de Hausdorff  $s$  – *dimensional* virá multiplicada por um factor  $\lambda^s$ . Estas propriedades de escala são fundamentais na teoria dos fractais.

**Proposição 4.3 (Propriedade de escala)** *Se  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$ , então*

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

onde  $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$ , i.e. o conjunto  $F$  multiplicado por um factor  $\lambda$ .

**Prova.** Se  $\{U_i\}$  for uma  $\delta$  – cobertura de  $F$ , então  $\{\lambda U_i\}$  é uma  $\lambda\delta$  – cobertura de  $\lambda F$ . Reciprocamente, se  $\{V_i\}$  for uma  $\lambda\delta$  – cobertura de  $\lambda F$ , então  $\{\frac{1}{\lambda}V_i\}$  é uma  $\delta$  – cobertura de  $F$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta \text{ – cobertura de } F \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta \text{ – cobertura de } F \right\} = \lambda^s \mathcal{H}_{\delta}^s(F). \end{aligned}$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  obtemos  $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$ . ■

Usando um argumento semelhante, obtemos a seguinte estimativa do efeito de transformações mais gerais (ver definições 2.11, 2.12 e 2.13), sobre as medidas de Hausdorff de conjuntos.

**Proposição 4.4** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \text{ para quaisquer } x, y \in F \quad (8)$$

com  $c$  e  $\alpha$  constantes positivas.

Então, para cada  $s$ ,

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_{\delta}^s(F) \quad (9)$$

**Prova.** Se  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$  – cobertura de  $F$ , então, visto que  $|f(F \cap U_i)| \leq c|U_i|^\alpha$ ,  $\{f(F \cap U_i)\}$  é uma  $\varepsilon$  – cobertura de  $f(F)$ , onde  $\varepsilon = c\delta^\alpha$ . Assim,  $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |U_i|^s$ , tendo-se  $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$ . Se  $\delta \rightarrow 0$ , também  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtendo-se (9). ■

As funções que satisfazem a condição (8) – condição de Hölder de expoente  $\alpha$ , dizem-se funções de Hölder, e são necessariamente contínuas.

Um caso particular importante, já referido na subsecção 2.2, é o caso em que  $\alpha = 1$ , i.e.

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \text{ para quaisquer } x, y \in F. \quad (10)$$

Nesta situação,  $f$  designa-se transformação de Lipschitz e verifica-se

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F) \quad (11)$$

Note-se que, como consequência do teorema do valor médio (ver proposição 2.18 e observação 2.18), qualquer função diferenciável com derivada limitada é necessariamente uma transformação de Lipschitz.

Analogamente, se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação de bi-Lipschitz, i.e. para alguns  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , com  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ ,

$$c_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 |x - y|, \quad \forall x, y \in F, \quad (12)$$

então

$$c_1^s \mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^s(f(F)) \leq c_2^s \mathcal{H}^s(F) \quad (13)$$

**Observação 4.5** *Para provar a 1ª desigualdade em (13) basta fazer  $\alpha = 1$  na proposição 4.4 e aplicar, a  $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ , o mesmo raciocínio usado na prova dessa proposição.*

Um caso particular especial é quando  $f$  é uma *semelhança* (ver definição 2.9) de razão  $r$ , tendo-se  $|f(x) - f(y)| = r|x - y|$  para todos  $x, y \in F$ . Neste caso

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = r^s \mathcal{H}^s(F).$$

Esta é a propriedade de escala das medidas de Hausdorff, que generaliza as conhecidas propriedades de escala de comprimento, área, volume, etc.

Note-se que as ampliações/reduções por um factor  $\lambda$  (consideradas na proposição 4.3) são um caso particular das *semelhanças*. Outros casos particulares de interesse, são as isometrias (ver definição 2.8). Se  $f$  é uma isometria, i.e.  $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ , então  $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$ .

Em particular, como era previsível, a medida de Hausdorff é invariante por translações (i.e.  $\mathcal{H}^s(F + z) = \mathcal{H}^s(F)$ , onde  $F + z = \{x + z : x \in F\}$ ), e por rotações.

Para finalizar esta secção, não podemos deixar de referir que, embora, para os nossos propósitos, estejamos apenas interessados nas medidas e dimensões de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , toda a construção acima apresentada funciona em qualquer espaço métrico. Mais, a medida de Hausdorff *s-dimensional* que aqui definimos, pode ser vista como um caso particular de uma construção muito mais geral, que apresentamos na observação seguinte.

**Observação 4.6** *Medida de Hausdorff é o nome (colectivo) para uma classe de medidas definidas sobre os conjuntos borelianos, de um espaço métrico  $X$ , pela seguinte construção:*

*Seja  $\mathcal{U}$  uma certa classe de subconjuntos abertos de  $X$ , e seja  $l$ , uma função, não negativa, definida em  $\mathcal{U}$ . Consideremos*

$$\lambda(B, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l(A_i) : A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}, |A_i| \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots; B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas finitas ou numeráveis do conjunto de Borel  $B \subset X$ , por conjuntos de  $\mathcal{U}$  com diâmetro não superior a  $\varepsilon$ . A medida de Hausdorff,  $\lambda$ , definida pela classe  $\mathcal{U}$  e a função  $l$ , é o limite

$$\lambda(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(B, \varepsilon).$$

Se  $\mathcal{U}$  for a coleção de todas as bolas em  $X$ , e  $l$ , a função definida por  $l(A) = |A|^s$ ,  $\alpha > 0$ , então a medida de Hausdorff,  $\lambda$ , correspondente é precisamente a medida de Hausdorff  $s$  – dimensional (de acordo com o ponto 2. da observação 4.2).

No entanto, uma vez que vamos estudar apenas a medida de Hausdorff  $s$ –dimensional, convencionamos que, ao longo deste trabalho, o termo ‘medida de Hausdorff’ significa ‘medida de Hausdorff  $s$  – dimensional’.

## 4.2 Dimensão de Hausdorff

Recorrendo à equação (6) torna-se claro que, para qualquer conjunto  $F$  e qualquer  $\delta < 1$ ,  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  não é crescente com  $s$ . Assim, por (7),  $\mathcal{H}^s(F)$  também não cresce com  $s$ . Mais, temos que, se  $t > s$  e  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$  – cobertura de  $F$ , então

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

Assim, se tomarmos os ínfimos (sobre as  $\delta$  – coberturas), obtemos  $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  verificamos que, se  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ , então  $\mathcal{H}^t(F) = 0$  para  $t > s$ . Por outro lado, daqui decorre também que, se  $\mathcal{H}^t(F) > 0$ , não podemos ter  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ , logo  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ .

Assim, a representação gráfica de  $\mathcal{H}^s(F)$ , como função de  $s$  (ver figura 7) mostra que existe um valor crítico de  $s$ , no qual  $\mathcal{H}^s(F)$  ‘salta’ de  $\infty$  para 0.

Este valor crítico chama-se *dimensão de Hausdorff* de  $F$ , e escreve-se  $\dim_H F$ .

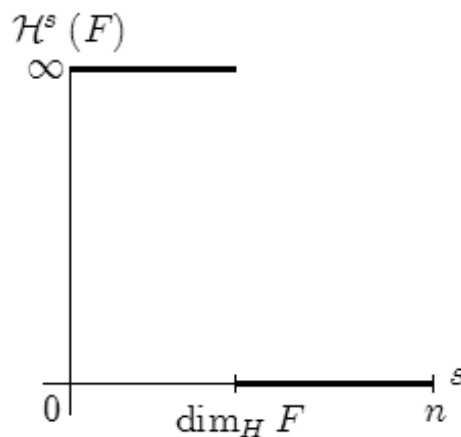


Figura 7 - Representação gráfica de  $\mathcal{H}^s(F)$ , como função de  $s$ .

**Observação 4.7** A dimensão de Hausdorff é também conhecida por dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

Formalmente,

$$\dim_H F = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

tendo-se

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } s < \dim_H F \\ 0 & \text{se } s > \dim_H F \end{cases}$$

Se  $s = \dim_H F$ , então  $\mathcal{H}^s(F)$  pode ser zero ou infinito, ou verificar  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ . (Situação que, como veremos, ocorre em muitos exemplos familiares.)

Um conjunto de Borel, para o qual se satisfaz esta última condição, chama-se um *s-conjunto*. Matematicamente, os *s-conjuntos* são os mais convenientes para estudar, e favoravelmente estes ocorrem com frequência.

A dimensão de Hausdorff satisfaz as seguintes propriedades (que devem ser comuns a qualquer definição aceitável de dimensão):

- *Monotonia*: Se  $F_1 \subset F_2$ , então  $\dim_H F_1 \leq \dim_H F_2$ . O que decorre, imediatamente, da propriedade de medida que garante  $\mathcal{H}^s(F_1) \leq \mathcal{H}^s(F_2)$  para cada  $s$ .
- *Conjuntos Abertos*: Se  $F$  é um subconjunto aberto (não vazio) de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\dim_H F = n$ , uma vez que  $F$  contém uma bola com volume *n-dimensional* positivo.
- *Variedades diferenciáveis*: Se  $F$  é uma subvariedade *m-dimensional* continuamente diferenciável (ou seja, uma superfície *m-dimensional* suave) em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\dim_H F = m$ .

Em particular, as curvas suaves têm dimensão 1 e as superfícies suaves têm dimensão 2. Esta propriedade pode deduzir-se, essencialmente, a partir da relação entre as medidas de Hausdorff e de Lebesgue.

- *Estabilidade finita*: Se  $\{F_1, \dots, F_k\}$  é uma colecção finita de conjuntos, então  $\dim_H \bigcup_{i=1}^k F_i = \max_{1 \leq i \leq k} \{\dim_H F_i\}$ .
- *Conjuntos finitos*: Se  $F$  é finito, então  $\dim_H F = 0$ . (Consequência directa da propriedade anterior.)
- *Estabilidade numerável*: Se  $F_1, F_2, \dots$ , é uma sequência (numerável) de conjuntos, então  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$ . Para mostrarmos esta propriedade façamos  $s = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$ . Por um lado, pela propriedade da monotonia  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j$  para cada  $j$ , logo  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq s$ . Por outro lado, se  $r > \dim_H F_i$  para

qualquer  $i$ , então  $\mathcal{H}^r(F_i) = 0$ , e conseqüentemente  $\mathcal{H}^r\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = 0$ , obtendo-se a desigualdade contrária.

- *Conjuntos numeráveis:* Se  $F$  é numerável, então  $\dim_H F = 0$ . Pois, se  $F_i$  for um único ponto,  $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$  e  $\dim_H F_i = 0$ , assim, pela estabilidade numerável,  $\dim_H F = \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$ .

Quanto às propriedades que reflectem o comportamento da dimensão de Hausdorff, de um conjunto, sob certas transformações, estas decorrem das propriedades correspondentes da medida de Hausdorff.

**Proposição 4.8** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  e suponhamos que  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfaz uma condição de Hölder (ver (8)). Então  $\dim_H f(F) \leq \frac{\dim_H F}{\alpha}$ .*

**Prova.** Se  $s > \dim_H F$ , então, pela proposição 4.4,  $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F) = 0$ , o que implica que  $\dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$  para qualquer  $s > \dim_H F$ . ■

#### Corolário 4.9

(a) *Se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação de Lipschitz (ver (10)), então*

$$\dim_H f(F) \leq \dim_H F.$$

(b) *Se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação de bi-Lipschitz (ver (12)), então*

$$\dim_H f(F) = \dim_H F.$$

**Prova.** A parte (a) decorre da proposição 4.8, tomando  $\alpha = 1$ . Seguindo a mesma ideia da observação 4.5, i.e. aplicando a parte (a) a  $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ , obtemos a outra desigualdade necessária para provar (b). ■

#### Observação 4.10

1. *Na subsecção 6.2 será apresentado um exemplo concreto da importante propriedade que acabamos de provar - conjuntos bi-Lipschitz equivalentes (ver definição 2.14) têm a mesma dimensão de Hausdorff. Embora fosse conveniente colocá-lo neste ponto do trabalho, teremos de incluí-lo na secção referida pois necessitaremos do princípio de distribuição de massa (proposição 6.2) que será apresentado nessa secção. Procuraremos, com esse exemplo explicitar o raciocínio usado na prova acima.*
2. *O resultado da alínea (a) mantém-se válido se  $F \subset X$ , com  $X$  um conjunto aberto, no qual,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ , é diferenciável com derivada limitada. (É uma consequência do teorema do valor médio (ver proposição 2.18 e observação 2.18).)*

3. Como caso particular da alínea (b) temos que, se  $f$  é uma semelhança (ver definições 2.9), então  $\dim_H f(F) = \dim_H F$ .
4. Além das propriedades da dimensão de Hausdorff acima apresentadas, existem outras, que relacionam e estabelecem comparações entre esta e outras definições de dimensão. Essas propriedades serão apresentadas apenas na secção seguinte, uma vez definidas as dimensões “box-counting”.

O corolário 4.9 revela uma propriedade fundamental da dimensão de Hausdorff:

*A dimensão de Hausdorff é invariante sob transformações de bi-Lipschitz.*

Assim, se dois conjuntos têm dimensões de Hausdorff diferentes, não pode existir uma transformação de bi-Lipschitz que transforme um no outro.

Pode fazer-se uma analogia com a situação que ocorre na topologia, onde vários ‘invariantes’ (como os grupos de homologia ou de homotopia) permitem distinguir dois conjuntos não homeomorfos (ver subsecção 2.2). Se os invariantes topológicos de dois conjuntos são diferentes, então não pode existir um homeomorfismo entre eles.

Na topologia, dois conjuntos são vistos como ‘o mesmo’ se existir um homeomorfismo entre eles. Uma possível forma de abordar a geometria fractal é ‘identificar’ dois conjuntos (isto é, considerá-los como ‘o mesmo’), se existir uma transformação de bi-Lipschitz entre eles. Da mesma forma que os invariantes topológicos são usados para distinguir conjuntos não homeomorfos, podemos procurar parâmetros que permitam distinguir conjuntos não bi-Lipschitz equivalentes (ver definição 2.14). A dimensão de Hausdorff é um desses parâmetros, embora não seja um ‘invariante completo’, pois, excepto para algumas classes específicas de conjuntos, podem existir conjuntos que não são bi-Lipschitz equivalentes mas têm a mesma dimensão. Outros invariantes, podem surgir de outras definições de dimensão (como veremos na secção seguinte, as dimensões “box-counting” também verificam esta propriedade) e da topologia, tendo em conta que uma transformação de bi-Lipschitz é necessariamente contínua.

Uma vez que estamos a relacionar a dimensão de Hausdorff e a topologia, convém notar que, por si só, a dimensão de um conjunto, não nos transmite muita informação sobre as suas propriedades topológicas. No entanto, a proposição seguinte diz-nos que qualquer conjunto com dimensão de Hausdorff menor que 1 é necessariamente ‘disperso’ ao ponto de ser totalmente desconexo, isto é, nenhum par de pontos pertence à mesma componente conexa (ver definição 2.6).

**Proposição 4.11** *Um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  com  $\dim_H F < 1$  é totalmente desconexo.*

**Prova.** Sejam  $x, y \in F$ , com  $x \neq y$ . Consideremos a aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$ , definida por  $f(z) = |z - x|$ . Como  $f$  não aumenta as distâncias, i.e.  $|f(z) - f(w)| \leq |z - w|$ , a alínea (a) do corolário 4.9 garante-nos que  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$ . Assim,  $f(F)$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  com medida  $\mathcal{H}^1$ , ou comprimento, zero, logo tem um complementar denso. Escolhendo  $r$ , tal que  $r \notin f(F)$  e  $0 < r < f(y)$  decorre que

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}.$$

Tendo-se assim, que  $F$  está contido em dois conjuntos abertos disjuntos, com  $x$  num deles e  $y$  no outro. Fica assim provado  $x$  e  $y$  estão em diferentes componentes conexas de  $F$ . ■

**Observação 4.12** *Como veremos mais adiante, no exemplo 4.14, o conjunto de Cantor tem dimensão de Hausdorff  $\frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0.631 < 1$ , logo, pela proposição anterior, este conjunto é totalmente desconexo.*

### 4.3 Exemplos simples do cálculo da dimensão de Hausdorff

Nesta subsecção será calculada a dimensão de Hausdorff de alguns fractais simples, os quais já foram apresentados na secção 3. Ao longo do trabalho serão apresentados outros métodos para o cálculo da dimensão de Hausdorff.

**Exemplo 4.13** *Seja  $F$  a poeira de Cantor, construída, como descrito no exemplo 3.4, a partir do quadrado unitário (ver figura 5). Então  $1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq 2$ , logo  $\dim_H F = 1$ .*

*Cálculo:* Tomando a cobertura óbvia de  $F$ , por  $4^k$  quadrados de lado  $4^{-k}$  (ou seja, de diâmetro  $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$ ) em  $E_k$  (conforme a construção apresentada na secção 3), obtemos a estimativa  $\mathcal{H}_\delta^1(F) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2}$  para o ínfimo em (6). Quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , obtendo-se  $\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$ .

Para a ‘estimativa inferior’, denotamos por  $proj$ , a projecção ortogonal sobre o eixo dos  $xx$ . A projecção ortogonal não aumenta as distâncias, i.e.  $|proj\ x - proj\ y| \leq |x - y|$  se  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , logo  $proj$  é uma transformação de Lipschitz. Pela construção de  $F$ , a projecção de  $F$  no eixo dos  $xx$ ,  $proj\ F$ , é o intervalo unitário  $[0, 1]$ . Usando (11),

$$1 = \text{comprimento}([0, 1]) = \mathcal{H}^1([0, 1]) = \mathcal{H}^1(proj\ F) \leq \mathcal{H}^1(F). \quad \blacksquare$$

Note-se que, o mesmo argumento e resultado mantêm-se válidos, para um conjunto obtido por divisão consecutiva de quadrados, em  $m^2$  quadrados com comprimento de lado dado por  $\frac{1}{m}$  do comprimento de lado do quadrado inicial, sendo retido um quadrado em cada coluna.

Este processo, de usar a projecção ortogonal para obter uma ‘estimativa inferior’ para a medida de Hausdorff, só funciona em circunstâncias especiais, não servindo de base para um método geral. Usualmente é necessário recorrer a métodos mais complexos.

**Exemplo 4.14** *Seja  $F$  o conjunto de Cantor, apresentado no exemplo 3.1 (ver figura 2). Se  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ , então  $\dim_H F = s$  e  $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$ .*

*Cálculo Heurístico:* O conjunto de Cantor pode considerar-se dividido em duas partes: parte esquerda,  $F_E = F \cap [0, \frac{1}{3}]$ , e parte direita,  $F_D = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$ . Ambas estas partes são semelhantes a  $F$  mas reduzidas por um factor de  $\frac{1}{3}$ , e  $F = F_E \cup F_D$ , sendo esta união disjunta. Assim, pelas propriedades de uma medida (ver definição 2.20) e pela proposição 4.3, para qualquer  $s$ ,

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_E) + \mathcal{H}^s(F_D) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F).$$

Assumindo que, no valor crítico  $s = \dim_H F$ , temos  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ , podemos dividir por  $\mathcal{H}^s(F)$ , obtendo-se:  $1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s$ , ou seja,  $s = \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

*Cálculo Rigoroso:* Mantendo as designações usadas, na construção do conjunto de Cantor, apresentada na secção 3. A cobertura  $\{U_i\}$  de  $F$  formada pelos  $2^k$  intervalos (básicos) de  $E_k$ , de comprimento  $3^{-k}$  dá-nos que  $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) \leq \sum_i |U_i|^s = 2^k 3^{-ks} = 1$ , se  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos  $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$ .

Para provar que  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$  mostramos que

$$\sum_i |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s} \quad (14)$$

para qualquer cobertura  $\{U_i\}$  de  $F$ . É suficiente assumir que os  $U_i$  são intervalos e, expandindo-os um pouco e usando o facto de  $F$  ser compacto (ver subsecção 2.1), bastanos verificar (14) para o caso em que  $\{U_i\}$  é uma colecção finita de subintervalos fechados de  $[0, 1]$ . Para cada  $U_i$ , seja  $k$ , o inteiro, tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}. \quad (15)$$

Então  $U_i$  intersecta, no máximo, um intervalo básico de  $E_k$ , visto que, a separação entre estes intervalos básicos é de  $3^{-k}$ . Se  $j \geq k$ , então  $U_i$  intersecta, no máximo,  $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$  intervalos básicos de  $E_j$ , usando (15). Se escolhermos  $j$  suficientemente grande, tal que  $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$  para todos os  $U_i$ , então, visto que  $\{U_i\}$  intersecta todos os  $2^j$  intervalos básicos de comprimento  $3^{-j}$ , a contagem de intervalos, dá-nos  $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ , que se reduz a (14). ■

*Nota:* Este cálculo pode ser adaptado para mostrar que  $\mathcal{H}^s(F) = 1$ .

Já começa a tornar-se evidente que o cálculo, de medidas e dimensões de Hausdorff, pode ser bastante moroso, mesmo para conjuntos simples. Usualmente, a maior dificuldade reside na obtenção da estimativa inferior.

O método heurístico de cálculo usado no exemplo 4.14 é adequado para o cálculo da dimensão de Hausdorff de muitos conjuntos auto-semelhantes. Por exemplo, a curva de von Koch é constituída por quatro cópias de si própria, reduzidas por um factor de  $\frac{1}{3}$ , tendo, assim, dimensão de Hausdorff  $\frac{\log 4}{\log 3}$ .

Mais geralmente, se  $F = \bigcup_{i=1}^m F_i$ , onde cada  $F_i$  é geometricamente semelhante a  $F$ , mas reduzido por um factor  $c_i$ , então, desde que os  $F_i$  não se sobreponham ‘demasiado’, o argumento heurístico diz-nos que  $\dim_H F$  é o número,  $s$ , que satisfaz  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ . Em particular, um conjunto constituído por  $m$  cópias de si próprio, reduzidas por um factor  $r$ , tem dimensão  $-\frac{\log m}{\log r}$ , como foi referido na secção 3, onde designamos por “*similarity dimension*”, o número assim obtido.



## 5 Dimensões “box-counting”

Embora o tema central deste trabalho seja a dimensão de Hausdorff, é indispensável incluir uma secção dedicada a uma definição alternativa de dimensão: a dimensão “box-counting”.

Uma vez que, existem algumas propriedades, que relacionam estas duas dimensões, e servem de base às provas de alguns resultados, torna-se indispensável apresentar aqui a definição e algumas propriedades da dimensão “box-counting”. Em geral, serão omitidas as provas dos factos aqui expostos pois, para os nossos propósitos, não são particularmente úteis.

Passemos, então, à definição da dimensão “box-counting”, introduzida por Kolmogorov.

**Definição 5.1** *Seja  $F$  um subconjunto, limitado e não vazio, de  $\mathbb{R}^n$ . Sendo,  $N_r(F)$ , o menor número de conjuntos, de diâmetro  $r$ , que são suficientes para cobrir  $F$ . As dimensões “box-counting” inferior e superior de  $F$ , são dadas por*

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(F)}{-\log r} \quad (16)$$

e

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(F)}{-\log r}, \quad (17)$$

respectivamente. Se estes limites forem iguais, o valor comum chama-se dimensão “box-counting” ou “box dimension” de  $F$

$$\dim_B F = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(F)}{-\log r}. \quad (18)$$

Existem outras formas equivalentes desta definição. O valor dos limites (16)-(18) não se altera se tomarmos, para  $N_r(F)$ , qualquer um dos seguintes números:

- (i) o menor número de conjuntos, de diâmetro  $r$ , que são suficientes para cobrir  $F$ ,
- (ii) o menor número de bolas fechadas, de raio  $r$ , que são suficientes para cobrir  $F$ ,
- (iii) o menor número de cubos, de lado  $r$ , que são suficientes para cobrir  $F$ ,
- (iv) o maior número de bolas disjuntas, de raio  $r$ , com centros em  $F$ ,
- (v) o número de cubos “ $r$ -mesh” que intersectam  $F$ . (Sendo esta escolha para  $N_r(F)$ , a que originou o nome “box-counting”).

(Um cubo “ $r$ -mesh” é um cubo da forma  $[m_1 r, (m_1 + r)r] \times \dots \times [m_n r, (m_n + r)r]$ , onde  $m_1, \dots, m_n$  são inteiros).

A equivalência destas diferentes formas da definição, decorre da comparação, entre os valores de  $N_r(F)$ , em cada caso.

As dimensões “box-counting” inferior e superior, têm, em comum com a dimensão de Hausdorff (ver subsecção 4.2), as seguintes propriedades (onde  $\dim$  representa  $\underline{\dim}_B F$  ou  $\overline{\dim}_B F$ ):

- *Monotonia*: Se  $F_1 \subset F_2$ , então  $\dim F_1 \leq \dim F_2$ .
- *Conjuntos finitos*: Se  $F$  é finito, então  $\dim_H F = 0$ .
- *Conjuntos Abertos*: Se  $F$  é um subconjunto aberto (não vazio) de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\dim F = n$ .
- *Variedades diferenciáveis*: Se  $F$  é uma subvariedade  $m$ -dimensional continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\dim F = m$ .
- *Transformações de Lipschitz*: Se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de Lipschitz (ver definição 2.12), então  $\dim f(F) \leq \dim F$ . Note-se que este resultado mantém-se verdadeiro se  $F \subset X$ , com  $X$  um conjunto aberto, no qual,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ , é diferenciável com derivada limitada (usando o teorema do valor médio (ver proposição 2.18 e observação 2.18)). Observe-se também, que diferentes definições de dimensão podem dar-nos mais informação relativamente aos conjuntos Lipschitz equivalentes (ver definição 2.14).
- *Transformações de bi-Lipschitz*: Se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de bi-Lipschitz (ver definição 2.13), então  $\dim f(F) = \dim F$ . Um caso particular desta propriedade é a *invariância geométrica*, i.e. se  $f$  for uma semelhança ou uma transformação afim (ver definições 2.9 e 2.10), então  $\dim f(F) = \dim F$ .

A dimensão “box-counting” superior verifica ainda, a seguinte propriedade:

- *Estabilidade finita*: Se  $\{F_1, \dots, F_k\}$  é uma colecção finita de conjuntos, então  $\overline{\dim}_B \bigcup_{i=1}^k F_i = \max_{1 \leq i \leq k} \{\overline{\dim}_B F_i\}$ .

Uma das principais vantagens da dimensão de Hausdorff em comparação com as dimensões “box-counting”, é o facto de verificar a *estabilidade numerável*, que, em particular, garante que os conjuntos numeráveis tem dimensão de Hausdorff zero.

Temos ainda que,  $\underline{\dim}_B F = \underline{\dim}_B \bar{F}$  e  $\overline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B \bar{F}$ , onde  $\bar{F}$  é o fecho de  $F$ . Sendo esta uma desvantagem das dimensões “box-counting”, visto que, frequentemente, estudam-se fractais que são densos numa região aberta de  $\mathbb{R}^n$ , tendo, assim, dimensão “box-counting” nula.

Finalmente, é importante compreender a relação entre as dimensões “box-counting” e a dimensão de Hausdorff. Assim, passamos a apresentar as desigualdades básicas que relacionam as dimensões “box-counting” e a dimensão de Hausdorff.

Consideremos um conjunto limitado e não vazio,  $F$ . Se  $F$ , pode ser coberto por  $N_r(F)$  conjuntos de diâmetro  $r$ , então, pela definição (6),

$$\mathcal{H}_r^s(F) \leq N_r(F) r^s.$$

Se  $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}_r^s(F)$ , então  $\log N_r(F) + s \log r > 0$ , para  $r$  suficientemente pequeno. Assim,  $s \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(F)}{-\log r}$ , logo

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \quad (19)$$

para qualquer conjunto, não vazio e limitado,  $F \subset \mathbb{R}^n$ .

Embora as dimensões de Hausdorff e “*box-counting*” coincidam, em vários conjuntos ‘suficientemente regulares’, em geral, a primeira desigualdade, em (19) é estrita.

Na prática, a maior parte das definições de dimensão, tomam valores entre a dimensão de Hausdorff e a dimensão “*box-counting superior*”. Assim, se se mostrar que  $\dim_H F = \overline{\dim}_B F$ , então, as definições mais usuais de dimensão tomarão este valor comum, no conjunto  $F$ . Tendo-se que esta igualdade é verificada por muitos fractais bem conhecidos, como por exemplo a curva de von Koch.

Grosso modo, a definição (18) dá-nos que o menor número de conjuntos, de diâmetro  $r$ , suficientes para cobrir  $F$ ,  $N_r(F)$ , é aproximadamente da ordem de  $r^{-s}$ , i.e.  $N_r(F) \simeq r^{-s}$ , onde  $s = \dim_B F$ . Mais precisamente, diz-nos que

$$N_r(F) r^s \rightarrow \infty \quad \text{se } s < \dim_B F$$

e

$$N_r(F) r^s \rightarrow 0 \quad \text{se } s > \dim_B F.$$

tendo-se, assim,

$$\dim_B F = \inf \left\{ s > 0 : \lim_{r \rightarrow 0} N_r(F) r^s = 0 \right\}$$

Mas

$$N_r(F) r^s = \inf \left\{ \sum_i r^s : \{U_i\} \text{ é uma } r\text{-cobertura (finita) de } F \right\},$$

que se pode comparar com

$$\mathcal{H}_r^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } r\text{-cobertura de } F \right\},$$

que ocorre nas definições de medida e dimensão de Hausdorff. Observamos, assim, que, ao calcular a dimensão de Hausdorff, atribuímos diferentes pesos  $|U_i|^s$  a cada conjunto da cobertura,  $\{U_i\}$ , enquanto que, nas dimensões “*box-counting*”, usamos o mesmo peso,  $r^s$ , para qualquer conjunto da cobertura.

As dimensões “*box-counting*” podem ver-se como uma forma de quantificar a eficiência com que podemos cobrir um conjunto por pequenos conjuntos, do mesmo tamanho. Por outro lado, a dimensão de Hausdorff, envolve coberturas por conjuntos pequenos mas, com tamanhos, possivelmente, bastante variáveis.

Pelo facto de serem determinadas por coberturas, formadas por conjuntos com o mesmo tamanho, as dimensões “*box-counting*” acabam por ser mais simples de calcular do que a dimensão de Hausdorff. Consideremos o seguinte exemplo.

**Exemplo 5.2** *Seja  $F$  o conjunto de Cantor (ver exemplo 3.1). Então  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \frac{\log 2}{\log 3}$ .*

**Prova.** A cobertura óbvia de  $F$ , pelos  $2^k$  intervalos de  $E_k$ , de comprimento  $3^{-k}$ , dá-nos que  $N_r(F) \leq 2^k$  se  $3^{-k} < r \leq 3^{-k+1}$ . Por (17)

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(F)}{-\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Para obter a outra desigualdade, basta observar que, qualquer intervalo de comprimento  $r$ , com  $3^{-k-1} \leq r < 3^{-k}$ , intersecta, no máximo, um dos intervalos básicos, de comprimento  $3^{-k}$ , usados na construção de  $F$ . Existem  $2^k$  intervalos básicos nessas condições, logo, são necessários, pelo menos,  $2^k$  intervalos de comprimento  $r$ , para cobrir  $F$ . Assim,  $N_r(F) \geq 2^k$ , obtendo-se que,  $\underline{\dim}_B F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ . ■

**Observação 5.3** *Acabamos, assim, de verificar que, no caso do conjunto de Cantor,  $\dim_H F = \dim_B F$ . (Ver exemplo 4.14.)*

## 6 Técnicas para o cálculo de dimensões

Para a maioria dos conjuntos, uma tentativa de cálculo da dimensão, em particular a dimensão de Hausdorff, torna explícitas as limitações práticas do uso directo das definições. O cálculo rigoroso de dimensões, geralmente, implica várias páginas de manipulações complicadas e pouco intuitivas.

Nesta secção introduzem-se algumas das técnicas básicas usadas para o cálculo de dimensões. Mais precisamente, na primeira subsecção, descrevem-se os métodos de distribuição de massa e incluem-se alguns exemplos da aplicação destas técnicas. Na última subsecção é apresentado um exemplo elucidativo da invariância da dimensão de Hausdorff sob transformações de bi-Lipschitz.

### 6.1 Métodos de distribuição de massa

Para a maioria dos fractais, é simples obter estimativas superiores para a dimensão, usando coberturas naturais, por conjuntos pequenos.

**Proposição 6.1** *Se  $F$  admite uma cobertura com  $n_k$  conjuntos, de diâmetro inferior ou igual a  $\delta_k$ , com  $\delta_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Então*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

e, se  $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$  para algum  $0 < c < 1$ ,

$$\overline{\dim}_B F \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

Mais, se  $n_k \delta_k^s$  se mantém limitada quando  $k \rightarrow \infty$ , então  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

**Prova.** As desigualdades para as dimensões “*box-counting*” decorrem, imediatamente, das definições.

Para a última parte,  $\mathcal{H}_{\delta_k}^s(F) \leq n_k \delta_k^s$ , logo,  $\mathcal{H}_{\delta_k}^s(F)$  tende para um limite finito,  $\mathcal{H}^s(F)$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . ■

Assim, como já vimos (exemplo 4.14), no caso do conjunto de Cantor,  $F$ , as coberturas naturais, por  $2^k$  intervalos de comprimento  $3^{-k}$  dão-nos  $\dim_H F \leq \frac{\log 2}{\log 3}$ .

Muitas vezes, a ‘estimativa superior’, assim obtida, para a dimensão de Hausdorff de um conjunto, acaba por ser o verdadeiro valor. Contudo, pode não ser fácil demonstrá-lo.

Normalmente, é mais difícil encontrar uma ‘estimativa inferior’. Enquanto que para uma estimativa superior, basta avaliar somas da forma,  $\sum |U_i|^s$ , para coberturas específicas,  $\{U_i\}$ , de  $F$ , para obter uma estimativa inferior, temos que mostrar que,  $\sum |U_i|^s$ , é maior que alguma constante positiva, para qualquer  $\delta$ -cobertura de  $F$ . Existindo, evidentemente, imensas coberturas nessas condições. Em particular, quando trabalhamos com a dimensão de Hausdorff, ao contrário do que se passa quando usamos as dimensões “*box-counting*”, temos que ter em conta as coberturas em que alguns  $U_i$  são muito pequenos, e outros têm um diâmetro relativamente grande, o que nos impossibilita a obtenção de estimativas inferiores para  $\sum |U_i|^s$ , por um processo semelhante ao que usamos para encontrar as estimativas superiores.

Um método para contornar estas dificuldades, é mostrar que nenhum conjunto individual,  $U$ , pode cobrir uma parte demasiado grande de  $F$ , em comparação com o seu tamanho, medido como  $|U|^s$ . Então, se  $\{U_i\}$  cobre todo o conjunto  $F$ , a soma,  $\sum |U_i|^s$ , não pode ser muito pequena.

O método usual para fazer isto, é considerar, em  $F$ , uma distribuição de massa adequada,  $\mu$ , e comparar a massa,  $\mu(U)$ , coberta por  $U$ , com  $|U|^s$ , para cada  $U$ . (Recordemos que, uma distribuição de massa em  $F$ , é uma medida, cujo suporte está contido em  $F$ , tal que  $0 < \mu(F) < \infty$ , ver definições 2.22 e 2.23.)

**Proposição 6.2 (Princípio de distribuição de massa)** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mu$  uma distribuição de massa em  $F$ . Se, para algum  $s \geq 0$ , existem números  $c > 0$  e  $\delta > 0$  tais que*

$$\mu(U) \leq c |U|^s \tag{20}$$

para qualquer conjunto  $U$ , com  $|U| \leq \delta$ , então  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$  e

$$s \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

**Prova.** Seja  $\{U_i\}$  uma qualquer cobertura de  $F$ , então

$$0 < \mu(F) = \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s.$$

Tomando o ínfimo, obtemos  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ , para  $\delta$  suficientemente pequeno. Consequentemente  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ . ■

Note-se que a conclusão,  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ , mantém-se verdadeira se  $\mu$  for uma distribuição de massa em  $\mathbb{R}^n$ , e  $F$  um qualquer subconjunto. Observe-se, também, que este princípio, além de nos dar uma estimativa inferior para a dimensão de Hausdorff de um conjunto, indica-nos, caso se prove que essa estimativa coincide com o valor real, que esse mesmo conjunto tem medida  $\mathcal{H}^s$  não nula.

O princípio de distribuição de massa (proposição 6.2) dá-nos um processo para obter uma estimativa inferior para a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor,  $F$  (ver exemplo 3.1), de forma diferente da que foi apresentada no exemplo 4.14.

Seja  $\mu$ , a distribuição de massa natural em  $F$ , tal que, a cada um dos  $2^k$  intervalos básicos, de comprimento  $3^{-k}$ , em  $E_k$  (mantendo as notações usadas no exemplo 3.1), é atribuída a massa,  $2^{-k}$ . (Podemos visualizar esta distribuição de massa, pensando que, começamos por atribuir a  $E_0$  a massa 1 e dividimos, sucessivamente, a massa de cada intervalo de  $E_k$ , equitativamente, pelos seus dois subintervalos em  $E_{k+1}$  (ver proposição 2.29).)

Seja  $U$  um conjunto, com  $|U| < 1$  e seja  $k$ , o inteiro tal que,  $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$ . Temos que,  $U$  intersecta, no máximo, um dos intervalos de  $E_k$ . Então,

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = (3^{-k})^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq (3|U|)^{\frac{\log 2}{\log 3}},$$

e, assim, pelo princípio de distribuição de massa,  $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(F) > 0$  e  $\dim_H F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ .

**Exemplo 6.3** *Seja  $F_1 = F \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ , o produto do conjunto de Cantor,  $F$ , pelo intervalo unitário. Então,  $\dim_B F_1 = \dim_H F_1 = 1 + \frac{\log 2}{\log 3} = s$ , com  $0 < \mathcal{H}^s(F_1) < \infty$ .*

**Prova.** Seja  $s = 1 + \frac{\log 2}{\log 3}$ . Para cada  $k$ , temos uma cobertura (natural) de  $F$ , por  $2^k$  intervalos de comprimento  $3^{-k}$ . Uma coluna de  $3^k$  quadrados de lado  $3^{-k}$  (com diâmetro  $3^{-k}\sqrt{2}$ ) cobre, a parte de  $F_1$ , que está sobre cada um desses intervalos. Assim,  $F_1$ , pode ser coberto por  $2^k 3^k$  quadrados de lado  $3^{-k}$ . Então  $\mathcal{H}_{3^{-k}\sqrt{2}}^s(F_1) \leq 3^k 2^k (3^{-k}\sqrt{2})^s = 2^{\frac{s}{2}}$ , logo  $\mathcal{H}^s(F_1) \leq 2^{\frac{s}{2}}$  e  $\dim_H F_1 \leq \underline{\dim}_B F_1 \leq \overline{\dim}_B F_1 \leq s$ .

Definimos, agora, uma distribuição de massa,  $\mu$ , em  $F_1$ , tomando a distribuição de massa, usada acima, para o conjunto de Cantor (a cada intervalo básico de  $E_k$ , atribuímos a massa  $2^{-k}$ ), e distribuindo-a, uniformemente, ao longo dos rectangulos sobre  $F$ . Assim, se  $U$  é um rectângulo, com lados paralelos aos eixos coordenados, de altura  $h$ , que está sobre um dos intervalos básicos de  $F$ , de lado  $3^{-k}$ , então,  $\mu(U) \leq h2^{-k}$ .

Qualquer conjunto,  $U$ , está contido num quadrado de lado  $|U|$ , com lados paralelos aos eixos coordenados, logo, basta verificar se as condições do princípio de distribuição de massa, são satisfeitas por quadrados desta forma.

Se  $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$ , então  $U$  cobre, no máximo, um intervalo básico de  $F$  de lado  $3^{-k}$ , logo

$$\mu(U) \leq |U| 2^{-k} \leq |U| 3^{-k \frac{\log 2}{\log 3}} \leq |U| (3|U|)^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq 3^{\frac{\log 2}{\log 3}} |U|^s.$$

Pela proposição 6.2 (princípio de distribuição de massa),  $\mathcal{H}^s(F_1) > 0$ . ■

Note-se que, neste exemplo, a dimensão do produto de dois conjuntos, coincide com a soma das dimensões dos conjuntos.

Consideremos, agora, uma forma geral para construção de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , que generaliza a construção do conjunto de Cantor.

Seja  $[0, 1] = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ , uma sequência decrescente de conjuntos, sendo, cada  $E_k$ , uma união finita de intervalos fechados disjuntos (chamados *intervalos básicos*), contendo, cada  $E_k$ , pelo menos, dois intervalos de  $E_{k+1}$ , com o comprimento máximo, dos intervalos de  $E_k$ , a tender para 0, quando  $k \rightarrow \infty$ . Nestas condições, o conjunto

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k, \quad (21)$$

é um subconjunto totalmente desconexo de  $[0, 1]$ , que é, em geral, um fractal.

As estimativas superiores, para a dimensão de Hausdorff de  $F$ , obtêm-se tomando os intervalos de  $E_k$ , como uma possível cobertura, para cada  $k$ . Mas, como é usual, as estimativas inferiores, são mais difíceis de encontrar.

Consideremos agora alguns exemplos de conjuntos construídos por este processo.

Observe-se que, nos exemplos que se seguem, as estimativas superiores, para a dimensão, dependem do número e tamanho dos intervalos básicos, enquanto que, as estimativas inferiores, dependem do espaçamento (entre os intervalos básicos). Para estas estimativas (superior e inferior) coincidirem, os intervalos de  $E_{k+1}$  têm que estar, ‘aproximadamente uniformemente distribuídos’, dentro dos intervalos de  $E_k$ .

**Exemplo 6.4** *Seja  $s$  um número estritamente entre 0 e 1. Se, na construção geral (21), de  $F$ , para cada intervalo básico,  $I$ , de  $E_k$ , os intervalos,  $I_1, \dots, I_m$  ( $m \geq 2$ ), de  $E_{k+1}$ , contidos em  $I$ , tiverem o mesmo comprimento e o mesmo espaçamento entre si. Sendo os comprimentos dados por*

$$|I_i|^s = \frac{|I|^s}{m} \quad (1 \leq i \leq m), \quad (22)$$

*com a extremidade esquerda de  $I_1$  a coincidir com a extremidade esquerda de  $I$  e tendo-se também a coincidência entre as extremidades direitas de  $I_m$  e  $I$ . Então  $\dim_H F = s$  e  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .*

Antes de passarmos à prova, observemos que, segundo a construção apresentada neste exemplo,  $m$  pode ser diferente, para diferentes intervalos,  $I$ , de modo que, os intervalos de  $E_k$  podem ter comprimentos bastante diferentes.

**Prova.** Tendo-se  $I, I_i$ , nas condições acima, temos que

$$|I|^s = \sum_{i=1}^m |I_i|^s. \quad (23)$$

Aplicando isto, indutivamente, aos intervalos de  $E_k$  para sucessivos  $k$ , decorre que, para cada  $k$ ,  $1 = |[0, 1]|^s = \sum |I_i|^s$ , onde o somatório é tomado sobre todos os intervalos em  $E_k$ . Os intervalos em  $E_k$  cobrem  $F$ . Visto que o máximo dos comprimentos dos intervalos tende

para 0 quando  $k \rightarrow \infty$ , temos  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq 1$ , para  $\delta$  suficientemente pequeno, obtendo-se  $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$ .

Agora consideramos uma massa,  $\mu$ , distribuída em  $F$ , de forma que  $\mu(I) = |I|^s$ , para qualquer intervalo básico,  $I$ . Assim, começando com massa 1, em  $[0, 1]$ , dividimo-la, equitativamente, pelos intervalos de  $E_1$ , depois aplicamos o mesmo procedimento a cada intervalo de  $E_1$ , e assim sucessivamente; ver proposição 2.29. A equação (23) garante que se obtem uma distribuição de massa em  $F$ , com  $\mu(I) = |I|^s$  para cada intervalo básico,  $I$ .

Vamos agora estimar  $\mu(U)$ , para um qualquer intervalo,  $U$ , com extremidades em  $F$ .

Seja  $I$ , o mais pequeno intervalo básico que contém  $U$ , seja  $k$  o inteiro, tal que,  $I$  é um intervalo de  $E_k$ , e sejam  $I_1, \dots, I_m$  os intervalos de  $E_{k+1}$  contidos em  $I$ .

Então,  $U$  intersecta, pelo menos dois dos  $I_i$ , caso contrário,  $U$  estaria contido num intervalo básico mais pequeno. Seja  $j$  ( $\geq 2$ ) o número de  $I_i$ , que  $U$  intersecta.

O espaçamento entre  $I_i$ 's consecutivos é (usando (22)):

$$\frac{|I| - m|I_i|}{m-1} = \frac{|I| \left(1 - m \frac{|I_i|}{|I|}\right)}{m-1} = \frac{|I| \left(1 - m^{1-\frac{1}{s}}\right)}{m-1} \geq c_s \frac{|I|}{m}$$

onde  $c_s = \left(1 - 2^{1-\frac{1}{s}}\right)$ .

Assim, visto que  $U$  intersecta pelo menos  $j-1$  'espaços',

$$|U| \geq \frac{j-1}{m} c_s |I| \geq \frac{j}{2m} c_s |I|. \quad (24)$$

Como  $\mu(U)$  é, no máximo, igual à soma das medidas dos intervalos básicos  $I_i$ , que  $U$  intersecta, e usando (23) e (24), temos que:

$$\mu(U) \leq j\mu(I_i) = j|I_i|^s = \frac{j}{m} |I|^s \leq 2^s c_s^{-s} \left(\frac{j}{m}\right)^{1-s} |U|^s \leq 2^s c_s^{-s} |U|^s \quad (25)$$

Isto é verdadeiro para qualquer intervalo,  $U$ , com extremidades em  $F$ , e, conseqüentemente, para qualquer conjunto  $U$  (aplicando (25) ao menor intervalo que contém  $U \cap F$ ). Concluindo-se, pela proposição 6.2, que  $\mathcal{H}^s(F) > 0$ . ■

Uma estimativa mais cuidadosa de  $\mu(U)$  conduziria a  $\mathcal{H}^s(F) = 1$ .

Os conjuntos que se obtêm, pelo processo do exemplo anterior, mas mantendo  $m$  constante, chamam-se conjuntos de Cantor uniformes. Estes são uma generalização natural do conjunto de Cantor (apresentado no exemplo 3.1).

**Exemplo 6.5 (Conjuntos de Cantor uniformes)** *Seja  $m \geq 2$  um inteiro e  $0 < \lambda < \frac{1}{m}$ . Seja  $F$ , o conjunto obtido substituindo, cada intervalo básico  $I$ , por  $m$  subintervalos, igualmente espaçados, de comprimento  $\lambda|I|$ , com as extremidades de  $I$ , coincidindo com as extremidades, respectivas, dos subintervalos extremos. Então  $\dim_H F = \dim_B F = \frac{\log m}{-\log \lambda}$  e  $0 < \mathcal{H}^{\frac{\log m}{-\log \lambda}}(F) < \infty$ .*



**Prova.** O conjunto  $F$  pode obter-se, fazendo  $m$  constante e  $s = \frac{\log m}{-\log \lambda}$ , no exemplo 6.4. A equação (22), torna-se  $(\lambda |I|)^s = \frac{1}{m} |I|^s$  e é satisfeita, então, pelo referido exemplo,  $0 < \mathcal{H}^{\frac{\log m}{-\log \lambda}}(F) < \infty$  e  $\dim_H F = s$ .

Para a dimensão “box-counting”, note-se que,  $F$  pode ser coberto pelos  $m_k$  intervalos básicos, de comprimento  $\lambda^{-k}$ , em  $E_k$ , para cada  $k$ , obtendo-se  $\overline{\dim}_B F \leq \frac{\log m}{-\log \lambda}$ , da maneira usual. ■

O exemplo seguinte, é outro caso particular da construção geral.

**Exemplo 6.6** *Suponhamos que, na construção geral (21), cada intervalo de  $E_{k-1}$  contém, pelo menos,  $m_k$  intervalos de  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), separados por espaços de, pelo menos,  $\varepsilon_k$ , com  $0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$  para cada  $k$ . Então*

$$\dim_H F \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \varepsilon_k)} \quad (26)$$

**Prova.** Podemos supor que cada conjunto,  $E_{k-1}$ , contém exactamente  $m_k$  intervalos de  $E_k$ ; caso contrário, podemos ignorar os intervalos em excesso e passar a considerar conjuntos,  $E_k$  e  $F$ , mais pequenos, para os quais isto é verdade.

Podemos definir, em  $F$ , uma distribuição de massa,  $\mu$ , atribuindo a massa  $\frac{1}{m_1 \dots m_k}$ , a cada um dos  $m_1 \dots m_k$  intervalos básicos de  $E_k$ .

Estimemos, agora,  $\mu(U)$ , para um intervalo  $U$ , com  $0 < |U| < \varepsilon_1$ . Seja  $k$ , o inteiro, tal que,  $\varepsilon_k \leq |U| < \varepsilon_{k-1}$ . O número de intervalos de  $E_k$  que intersectam  $U$ , é:

- (i) No máximo  $m_k$ , porque  $U$  não intersecta mais do que um intervalo de  $E_{k-1}$ .
- (ii) No máximo  $\frac{|U|}{\varepsilon_k} + 1 \leq 2\frac{|U|}{\varepsilon_k}$ , visto que, os intervalos de  $E_k$  têm ‘espaços’ de, pelo menos,  $\varepsilon_k$ , entre eles.

Cada intervalo de  $E_k$  tem a massa de  $\frac{1}{m_1 \dots m_k}$ , logo

$$\mu(U) \leq \frac{1}{m_1 \dots m_k} \min \left\{ 2\frac{|U|}{\varepsilon_k}, m_k \right\} \leq \frac{1}{m_1 \dots m_k} \left( 2\frac{|U|}{\varepsilon_k} \right)^s m_k^{1-s}$$

para qualquer  $0 \leq s \leq 1$ .

Assim,  $\frac{\mu(U)}{|U|^s} \leq \frac{2^s}{(m_1 \dots m_{k-1}) m_k^s \varepsilon_k^s}$  que é limitado superiormente por uma constante, desde que  $s < \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \varepsilon_k)}$ . O resultado decorre do princípio de distribuição de massa (proposição 6.2). ■

Suponhamos agora que, no exemplo 6.6, todos os intervalos de  $E_k$  têm comprimento  $\delta_k$ , e que, cada intervalo de  $E_{k-1}$ , contém, exactamente,  $m_k$  intervalos de  $E_k$ , que estão ‘aproximadamente igualmente espaçados’, no sentido que  $m_k \varepsilon_k \geq c \delta_{k-1}$ , onde  $c > 0$  é uma constante. Então, (26), torna-se

$$\dim_H F \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log c - \log(\delta_{k-1})} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(\delta_{k-1})}$$

Mas  $E_{k-1}$  contem  $m_1 \dots m_{k-1}$  intervalos de comprimento  $\delta_{k-1}$ , tendo-se que, esta expressão é igual à estimativa superior dada pela proposição 6.1.

Assim, no caso de os intervalos estarem ‘convenientemente’ espaçados, obtemos a igualdade em (26).

Já vimos que, o princípio de distribuição de massa (proposição 6.2), embora tendo por base uma ideia simples, pode ser muito útil no cálculo das dimensões de Hausdorff e “box-counting”.

Consideremos, agora, uma variação deste método.

A proposição 6.7 (a), abaixo, expressa que, é suficiente que a condição (20), se verifique apenas para bolas, suficientemente pequenas, centradas em cada ponto de  $F$ .

Embora os métodos de distribuição de massa sejam pouco utilizados na procura de estimativas superiores, incluímos na proposição 6.7, uma parte (b) que é, em certo sentido, dual à (a). Não será, no entanto, apresentada a prova da alínea (b).

**Proposição 6.7** *Seja  $\mu$  uma distribuição de massa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $F \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto de Borel e  $c > 0$ , uma constante.*

(a) *Se  $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} < c$  para qualquer  $x \in F$ , então  $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ .*

(b) *Se  $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} > c$  para qualquer  $x \in F$ , então  $\mathcal{H}^s(F) \leq 2^s \frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{c}$ .*

**Prova.**

(a) Para cada  $\delta > 0$ , seja

$$F_\delta = \{x \in F : \mu(B_r(x)) < (c - \varepsilon)r^s \text{ para qualquer } 0 < r \leq \delta, \text{ para algum } \varepsilon > 0\}.$$

Seja  $\{U_i\}$  uma  $\delta$ -cobertura de  $F$  e, conseqüentemente, de  $F_\delta$ . Para cada  $U_i$ , que contenha um ponto  $x$  de  $F_\delta$ , a bola  $B_{|U_i|}(x)$  contem  $U_i$ .

Por definição de  $F_\delta$ ,

$$\mu(U_i) \leq \mu(B_{|U_i|}(x)) < c|U_i|^s,$$

logo,

$$\mu(F_\delta) \leq \sum_{\{i:U_i \cap F_\delta \neq \emptyset\}} \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s.$$

Como  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura qualquer, de  $F$ , decorre que

$$\mu(F_\delta) \leq c\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq c\mathcal{H}^s(F).$$

Como  $F_\delta$  ‘tende para’  $F$ , quando  $\delta$  decresce para 0, temos, por (5), que  $\mu(F) \leq c\mathcal{H}^s(F)$ . ■

## 6.2 Exemplo elucidativo da invariância da dimensão de Hausdorff sob transformações de bi-Lipschitz

Terminamos este trabalho com uma subsecção dedicada à invariância da dimensão de Hausdorff sob transformações de bi-Lipschitz, uma vez que esta era uma das principais propriedades (desta dimensão) que pretendíamos transmitir e cuja importância foi discutida na subsecção 4.2.

Mais concretamente, finalizamos com um exemplo, com o qual pretendemos mostrar como se aplica, na prática, o método que nos permitiu provar, na subsecção referida, dum ponto de vista teórico, a igualdade das dimensões de Hausdorff de conjuntos bi-Lipschitz equivalentes.

Seria conveniente colocar este exemplo logo após a prova do corolário 4.9, que afirma que conjuntos bi-Lipschitz equivalentes têm a mesma dimensão de Hausdorff, no entanto, como lá foi esclarecido, tivemos de incluí-lo nesta secção pois este requer a utilização do princípio de distribuição de massa (proposição 6.2) apresentado na subsecção anterior.

Estamos, assim, em condições de apresentar, um exemplo concreto da invariância da dimensão de Hausdorff sob transformações de bi-Lipschitz. Usaremos o triângulo de Sierpinski, apresentado no exemplo 3.3, e a transformação de bi-Lipschitz  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 5x$  (note-se que  $f$  é uma semelhança (ver definição 2.9), mais precisamente  $|f(x) - f(y)| = 5|x - y|$ ).

A prova será baseada no raciocínio usado, na subsecção 4.2, para mostrar a invariância da dimensão de Hausdorff sob transformações de bi-Lipschitz no caso geral. Propositadamente, não usaremos uma prova mais simples (ver observação 6.9, abaixo), procurando, assim, usar este exemplo (prático), para clarificar o processo que está implícito na prova (da alínea (b)) do corolário 4.9.

**Exemplo 6.8** *Seja  $F$  o triângulo de Sierpinski, considerado no exemplo 3.3 (ver figura 4), tomando, para  $E_0$  o triângulo equilátero de lado 1. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a transformação de bi-Lipschitz dada por  $f(x) = 5x$ . Então  $\dim_H f(F) = \dim_H F = \frac{\log 3}{\log 2}$ .*

**Prova.** Começemos por calcular a dimensão de Hausdorff do triângulo de Sierpinski,  $F$ .

Usando as denominações introduzidas quando consideramos o triângulo de Sierpinski, na secção 3. Temos que, para cada  $k$ , os  $3^k$  triângulos equiláteros, de lado  $2^{-k}$ , que constituem o conjunto  $E_k$ , cobrem o conjunto  $F$ , tendo cada um deles diâmetro  $2^{-k}$ . Assim,  $\mathcal{H}_{2^{-k}}^s(F) \leq 3^k 2^{-ks} = 1$ , se  $s = \frac{\log 3}{\log 2}$ . Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos  $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$ , logo  $\dim_H F \leq s$ .

Para obter a estimativa inferior, vamos usar o princípio de distribuição de massa (proposição 6.2).

Começamos por definir em  $F$  uma distribuição de massa,  $\mu$ , da seguinte forma: Atribuímos ao triângulo inicial,  $E_0$ , a massa 1, e dividimos, sucessivamente, a massa de cada triângulo de  $E_k$ , equitativamente, pelos seus três ‘sub-triângulos’ em  $E_{k+1}$ . Assim, a cada um dos  $3^k$  triângulos que constituem  $E_k$ , é atribuída a massa  $3^{-k}$ .

Seguidamente notamos que, qualquer conjunto,  $U$ , está contido num quadrado de lado  $|U|$ , com lados paralelos aos eixos coordenados. Se  $2^{-(k+1)} \leq |U| < 2^{-k}$ , então a área do

quadrado de lado  $|U|$  é inferior a  $2^{-2k}$ . Por outro lado cada um dos triângulos equiláteros, de lado  $2^{-k}$ , em  $E_k$ , tem área  $\sqrt{3}2^{-2k-2}$ . Temos, assim, que a área do quadrado é, no máximo, igual a  $\frac{4}{\sqrt{3}}$  da área de um triângulo de  $E_k$ . Como a cada um desses triângulos atribuímos a massa  $3^{-k}$ , obtemos

$$\mu(U) \leq \frac{4}{\sqrt{3}}3^{-k} = \frac{4}{\sqrt{3}}2^{-k\frac{\log 3}{\log 2}} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}(2|U|)^{\frac{\log 3}{\log 2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}2^s |U|^s.$$

Concluindo-se, pela proposição 6.2, que  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  e  $\dim_H F \geq s$ .

Consideremos agora o conjunto  $f(F) = 5F$ , e mostremos que este tem necessariamente a mesma dimensão de Hausdorff que o conjunto  $F$ , i.e.  $\dim_H f(F) = \frac{\log 3}{\log 2}$ . Para isso, vamos usar o raciocínio aplicado na prova do corolário 4.9.

Acabamos de verificar que  $\dim_H F = \frac{\log 3}{\log 2} = s$ . Mais, provamos que

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty \quad (27)$$

Observemos agora que, se  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , como  $|f(F \cap U_i)| \leq 5|U_i|$ , então  $\{f(F \cap U_i)\}$  é uma  $\varepsilon$ -cobertura de  $f(F)$ , onde  $\varepsilon = 5\delta$ . Assim,  $\sum_i |f(F \cap U_i)|^s \leq 5^s \sum_i |U_i|^s$ , tendo-se

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon^s(f(F)) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^s : \{V_i\} \text{ é uma } \varepsilon\text{-cobertura de } f(F) \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_i |f(F \cap U_i)|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \\ &\leq \inf \left\{ 5^s \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} = 5^s \mathcal{H}_\delta^s(F) \end{aligned}$$

Resta observar que, se  $\delta \rightarrow 0$ , também  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtendo-se que  $\mathcal{H}^s(f(F)) \leq 5^s \mathcal{H}^s(F) < \infty$  (por (27)), resultando que  $\dim_H f(F) \leq s$ .

Por outro lado, tendo em conta que a função inversa de  $f$ , é dada por  $f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$ , obtemos que, se  $\{V_i\}$  for uma  $\varepsilon$ -cobertura de  $f(F)$ , então  $|f^{-1}(f(F) \cap V_i)| \leq \frac{1}{5}|V_i|$ , logo  $\{f^{-1}(f(F) \cap V_i)\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , com  $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ . Vindo que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(F) &= \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_i |f^{-1}(f(F) \cap V_i)|^s : \{V_i\} \text{ é uma } \varepsilon\text{-cobertura de } f(F) \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \frac{1}{5^s} \sum_i |V_i|^s : \{V_i\} \text{ é uma } \varepsilon\text{-cobertura de } f(F) \right\} = \frac{1}{5^s} \mathcal{H}_\varepsilon^s(f(F)) \end{aligned}$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos que  $\delta \rightarrow 0$ , e obtemos  $\mathcal{H}^s(f(F)) \geq 5^s \mathcal{H}^s(F) > 0$  (por (27)). Assim  $\dim_H f(F) \geq s$ . Concluindo-se, assim, que  $\dim_H f(F) = \dim_H F = \frac{\log 3}{\log 2}$ . ■

**Observação 6.9** A prova da igualdade  $\dim_H f(F) = \dim_H F$  poderia fazer-se de uma forma mais simples por qualquer um dos processos seguintes:

1. Calcular, separadamente, as dimensões de Hausdorff de  $F$  e de  $5F$ .

Com efeito, na primeira parte da prova acima calculamos  $\dim_H F = \frac{\log 3}{\log 2}$ . Podemos aplicar o mesmo raciocínio para obter  $\dim_H f(F)$ .

Começemos por observar que o conjunto  $f(F)$  é simplesmente uma ampliação de  $F$ . Podemos vê-lo como sendo o triângulo de Sierpinski, construído como no exemplo 3.3, usando como triângulo inicial, o triângulo equilátero,  $E'_0$ , de lado 5. Para diferenciar das notações usadas, na prova anterior, para o conjunto  $F$ , vamos designar o conjunto resultante do  $k$ -ésimo passo da construção de  $f(F)$ , por  $E'_k$ .

Temos que, para cada  $k$ , os  $3^k$  triângulos equiláteros, de lado e diâmetro  $5 \times 2^{-k}$ , que constituem o conjunto  $E'_k$ , cobrem o conjunto  $f(F)$ . Assim,  $\mathcal{H}_{2^{-k}5}^s(f(F)) \leq 3^k 2^{-ks} 5^s = 5^s$ , se  $s = \frac{\log 3}{\log 2}$ . Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos  $\mathcal{H}^s(f(F)) \leq 5^s$ , logo  $\dim_H f(F) \leq s$ .

Usamos, agora, o princípio de distribuição de massa (proposição 6.2) para obter a estimativa inferior. Para isso, definimos em  $5F$  uma distribuição de massa,  $\nu$ , de forma análoga à que utilizamos, na prova acima, para definir a distribuição de massa  $\mu$ . Assim, a cada um dos  $3^k$  triângulos que constituem  $E'_k$ , é atribuída a massa  $3^{-k}$ .

Consideremos, agora, um conjunto,  $U$ , com  $2^{-(k+1)} \leq |U| < 2^{-k}$ . Temos que  $U$  está contido num quadrado de lado  $|U|$  cuja área é inferior a  $2^{-2k}$ . Por outro lado cada um dos triângulos equiláteros, de lado  $5 \times 2^{-k}$ , em  $E'_k$ , tem área  $5^2 \sqrt{3} 2^{-2k-2}$ . Temos, assim, que a área do quadrado é inferior à área de cada triângulo de  $E'_k$ , conseqüentemente, a área da intersecção do conjunto  $U$  com  $E'_k$ , não pode ser maior que a área de cada um dos triângulos de  $E'_k$ . Como a cada um desses triângulos atribuímos a massa  $3^{-k}$ , obtemos

$$\nu(U) \leq 3^{-k} = 2^{-k \frac{\log 3}{\log 2}} \leq (2|U|)^{\frac{\log 3}{\log 2}} = 2^s |U|^s.$$

Concluindo-se, pela proposição 6.2, que  $\dim_H f(F) \geq s$ . Logo,  $\dim_H f(F) = s = \dim_H F$ .

2. Dada a particularidade da transformação de bi-Lipschitz. considerada, um processo mais simples para provar que  $\dim_H f(F) = \dim_H F$ , seria usar a propriedade de escala (proposição 4.3) da medida de Hausdorff.

Uma vez calculada a dimensão de Hausdorff de  $F$ ,  $\dim_H F = \frac{\log 3}{\log 2} = s$ , e provado o facto de que  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ , tal como foi feito na primeira parte da prova do exemplo 6.8, para mostrar a igualdade das dimensões de Hausdorff de  $F$  e  $f(F)$ , seria suficiente usar a proposição 4.3, para obter  $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(5F) = 5^s \mathcal{H}^s(F)$ , tendo-se, assim,  $0 < \mathcal{H}^s(f(F)) < \infty$ , e conseqüentemente  $\dim_H f(F) = s$ .

Neste exemplo, e uma vez que, propositadamente, na prova não foram omitidos pormenores, acabamos por reunir os resultados e definições mais relevantes abordados neste trabalho, dos quais se destaca a invariância da dimensão de Hausdorff sob transformações de bi-Lipschitz.

## Bibliografia

- [1] Falconer, K. J., *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 1990.
- [2] Falconer, K. J., *Techniques in Fractal Geometry*. John Wiley & Sons, 1997.
- [3] Strömberg, F., *Iterated function systems, the chaos game and invariant measures*. Master's thesis, Uppsala University, 1998.
- [4] Kapitaniak, T., *Chaos for Engineers - Theory, Applications and Control*. Second, Revised Edition. Springer-Verlag, 2000.
- [5] *Encyclopaedia of Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, 1989.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1	Teoria de conjuntos	3
2.2	Funções e limites	4
2.3	Medidas e distribuições de massa	6
<b>3</b>	<b>Fractais</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Medida e dimensão de Hausdorff</b>	<b>15</b>
4.1	Medida de Hausdorff	15
4.2	Dimensão de Hausdorff	19
4.3	Exemplos simples do cálculo da dimensão de Hausdorff	23
<b>5</b>	<b>Dimensões “box-counting”</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Técnicas para o cálculo de dimensões</b>	<b>28</b>
6.1	Métodos de distribuição de massa	28
6.2	Exemplo elucidativo da invariância da dimensão de Hausdorff sob transformações de bi-Lipschitz	35
	<b>Bibliografia</b>	<b>38</b>